9.3 Der Hauptsatz und Anwendungen

Definition: *Seien Funktionen* $F, f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *Funktionen mit* $F'(x) = f(x)$, $a \le x \le b$. *Dann heißt* $F(x)$ `Stammfunktion` *von* $f(x)$.

Bemerkung:

- Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so sind alle Funktionen der Form

  $$\tilde{F}(x) = F(x) + c$$

  mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ Stammfunktionen von $f(x)$.

- Sind $F_1(x)$ und $F_2(x)$ Stammfunktionen von $f(x)$, so ist die Funktion

  $$F_1(x) - F_2(x)$$

  konstant.

$\square$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Satz: *Sei* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion. Dann gilt:*

(a) Die Funktion

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

ist eine Stammfunktion von $f(x)$.

(b) Ist $F(x)$ *eine Stammfunktion von* $f(x)$, *so gilt*

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Beweis von (a): Wir zeigen, dass $F'(x) = f(x)$ gilt.

Sei $h \neq 0$ so, dass $x, x+h \in [a,b]$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) - f(x) \right| \\
= & \left| \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right) - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dt \right| \\
= & \left| \frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\,dt \right| \\
\leq & \sup\{\, |f(t) - f(x)| \,:\, |t-x| \leq h \text{ und } t \in [a,b] \} \\
\to & \; 0 \qquad \text{für } h \to 0,
\end{aligned}
$$

mit der (gleichmäßigen) Stetigkeit von f auf $[a,b]$. ∎

Beweis von (b): Mit Teil (a) gilt

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C$$

für eine Konstante C. Daraus folgt

$$\begin{aligned} F(b) &= \int_a^b f(t)\,dt + C \\ F(a) &= \int_a^a f(t)\,dt + C = 0 + C = C \end{aligned}$$

und somit

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

■

Bemerkungen.

- Teil (a) des Hauptsatzes gilt auch für *stückweise stetige* Funktionen $f(x)$. An den Unstetigkeitsstellen ist die Stammfunktion allerdings nur **einseitig differenzierbar** mit

$$F'(x^-) = \lim_{x \to x^-} f(x) \quad \text{und} \quad F'(x^+) = \lim_{x \to x^+} f(x).$$

- Eine Stammfunktion einer Funktion $f(x)$ nennt man `das unbestimmte Integral` von $f(x)$ und man schreibt

$$F = \int f(x)\,dx$$

Die Funktion F ist bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt.

$\square$

Beispiele. Wir bezeichnen mit C stets die Integrationskonstante.

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \qquad \text{für } n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \log|x| + C \qquad \text{für } x \neq 0$$

$$\int \sin(x) \, dx = -\cos(x) + C$$

$$\int \cos(x) \, dx = \sin(x) + C$$

$$\int \tan(x) \, dx = -\log|\cos(x)| + C \qquad \text{für } \cos(x) \neq 0$$

$$\int \cot(x) \, dx = \log|\sin(x)| + C \qquad \text{für } \sin(x) \neq 0$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)} \, dx = \tan(x) + C \qquad \text{für } x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2} \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

Weitere Beispiele.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin^2(x)}\,dx &= -\cot(x) + C && \text{für } x \neq k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \arcsin(x) + C && \text{für } |x| < 1 \\
\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx &= \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C \\
\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx &= \log\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C && \text{für } |x| > 1 \\
\int \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \arctan x + C \\
\int \frac{1}{1-x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C && \text{für } |x| \neq 1. \\
\int e^{ax}\,dx &= \frac{1}{a}e^{ax} + C && \text{für } a \neq 0.
\end{aligned}$$

Noch mehr Beispiele.

$$\begin{aligned}
\int b^x \, dx &= \frac{1}{\log(b)} b^x + C \qquad \text{für } b > 0, b \neq 1. \\
\int \log(x) \, dx &= x(\log(x) - 1) + C \qquad \text{für } x > 0. \\
\int \log_b(x) \, dx &= \frac{x}{\log(b)} (\log(x) - 1) + C \qquad \text{für } b > 0, x > 0. \\
\int \sinh(x) \, dx &= \cosh(x) + C \\
\int \cosh(x) \, dx &= \sinh(x) + C \\
\int \tanh(x) \, dx &= \log(\cosh(x)) + C \\
\int \coth(x) \, dx &= \log(|\sinh(x)|) + C \qquad \text{für } x \neq 0.
\end{aligned}$$

Wichtige Integrationsregeln.

Satz (Linearität): *Sind* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stückweise stetig, so gilt*

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. ■

Satz (Partielle Integration): *Sind* $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig differenzierbar, so gilt*

$$\int u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\, dx$$

für unbestimmte Integrale, womit für bestimmte Integrale folgt

$$\int_a^b u(x)v'(x)\, dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)\, dx.$$

Beweis: folgt direkt aus Produktregel der Differentiation: $(u \cdot v)' = u'v + uv'$. ■

Die Substitutionsregel.

Satz: *Ist* $h : [a, b] \longrightarrow [c, d]$ *stetig differenzierbar und* $f : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig mit Stammfunktion* $F(x)$*, so gilt*

$$\int f(h(t))h'(t)\,dt = F(h(t)).$$

Für bestimmte Integrale erhält man somit

$$\int_a^b f(h(t))h'(t)\,dt = F(h(b)) - F(h(a)) = \int_{h(a)}^{h(b)} f(x)\,dx.$$

Beweis: folgt direkt aus Kettenregel der Differentiation:

$$\frac{d}{dt}(F(h(t))) = f(h(t)) \cdot h'(t).$$

■

Beispiele.

- Linearität:

$$\int (28x^3 + 12x^2 - 2x + 3)\,dx = 7x^4 + 4x^3 - x^2 + 3x + C$$

- Partielle Integration:

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = (x-1)e^x + C$$

- Partielle Integration:

$$\begin{aligned}\int \log(x)\,dx &= \int 1 \cdot \log(x)\,dx \\ &= x \cdot \log(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx \\ &= x(\log(x) - 1) + C\end{aligned}$$

$\square$

Ein weiteres Beispiel zur partiellen Integration.

$$\begin{aligned}
\int \sin^2(x)\,dx &= \int \sin(x)\cdot\sin(x)\,dx \\
&= \sin(x)(-\cos(x)) + \int \cos^2(x)\,dx \\
&= -\sin(x)\cos(x) + \int (1-\sin^2(x))\,dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad 2\int \sin^2(x)\,dx &= -\sin(x)\cos(x) + x + C \\
\Longrightarrow \quad \int \sin^2(x)\,dx &= \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x)) + C
\end{aligned}$$

$\square$

Ein Beispiel zur Substitutionsregel.

Substituiere $x = h(t) = a\cos(t)$ in

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{1-(x/a)^2}\,dx = \int_{\pi}^{0} \sqrt{1-\cos^2(t)}(-a\sin(t))\,dt,$$

denn

$$dx = -a\sin(t)\,dt \qquad h(0) = a \quad \text{und} \quad h(\pi) = -a.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{a} \sqrt{1-(x/a)^2}\,dx &= \int_{\pi}^{0} \sqrt{1-\cos^2(t)}\,(-a\sin(t))\,dt \\ &= a\int_{0}^{\pi} \sin^2(t)\,dt \\ &= \frac{a}{2}(t-\sin(t)\cos(t))\Big|_{0}^{\pi} = \frac{a\pi}{2}. \end{aligned}$$

□

Ein weiteres Beispiel zur Substitutionsregel.

Substituiere $x = h(t) = t^2$, d.h. $t = \sqrt{x}$ für $x \geq 0$ in

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = \int e^t\,2t\,dt$$

denn es gilt

$$h'(t) = 2t.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\int e^{\sqrt{x}}\,dx &= \int e^t\,2t\,dt \\
&= 2(t-1)e^t + C \\
&= 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + C.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung.

- Nicht jedes Integral lässt sich explizit "lösen", d.h.
- nicht jede (integrierbare) Funktion besitzt "einfache" Stammfunktion bzw.
- manche Stammfunktionen lassen sich nicht durch Komposition von elementaren Funktionen darstellen.

Beispiele:

$$\mathrm{Si}(x) := \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\, dt \qquad (\texttt{Integralsinus})$$

$$\mathrm{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt \qquad (\texttt{Fehlerfunktion})$$

$$E(x,k) := \int_0^x (1-k^2 \sin^2 t)^{\pm\frac{1}{2}}\, dt \qquad (\texttt{Elliptische Integrale})$$

$\square$

Mittelwertsatz der Integralrechnung.

Satz: *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig,* $p : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrierbar und* $p(x) \geq 0$ *für* $a \leq x \leq b$*. Dann existiert ein* $\xi \in [a, b]$ *mit*

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b p(x)\,dx.$$

Beweis: Da $f(x)$ stetig und $p(x) \geq 0$ folgt:

$$\min(f[a, b]) \cdot p(x) \leq f(x)p(x) \leq \max(f[a, b]) \cdot p(x).$$

Integration über $[a, b]$ liefert:

$$\min(f[a, b]) \cdot \int_a^b p(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)p(x)\,dx \leq \max(f[a, b]) \cdot \int_a^b p(x)\,dx.$$

Die Behauptung folgt dann aus dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen. ■

Mittelwertsatz der Integralrechnung: Spezialfall.

Für den Spezialfall $p \equiv 1$ gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\cdot(b-a)$$

Beobachtung: Schreibt man diese Beziehung als

$$F(b) - F(a) = F'(\xi)(b-a)$$

mit der Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$, so folgt der `Mittelwertsatz der Differentialrechnung` für die Stammfunktion $F(x)$:

$$F'(\xi) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a} \qquad \text{für ein } \xi \in [a,b].$$

$\square$

Der Satz von Taylor. Man erhält die Taylor-Entwicklung einer Funktion $f \in C^{n+1}$ um x_0 durch n-fache partielle Integration:

$$
\begin{aligned}
f(x) - f(x_0) &= \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} (x-t)^0 f'(t)\,dt \\
&= (x-x_0)f'(x_0) + \int_{x_0}^{x} (x-t)^1 f''(t)\,dt \\
&= (x-x_0)f'(x_0) + (x-x_0)^2 \frac{f''(x_0)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} (x-t)^2 f'''(t)\,dt \\
&\vdots \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.
\end{aligned}
$$

Daraus bekommt man die Lagrange-Restgliedformel aus Mittelwertsatz:

$$
\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt = \frac{1}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1} \qquad \text{für ein } \xi \in [x_0, x].
$$