Beispiel.

Die Reihe

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \qquad \text{für } -1 < x < 1$$

konvergiert auch für $x = +1$. Somit ist nach dem Abelschen Grenzwertsatz insbesondere die Gleichung

$$\log(1+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} 1^{k+1}$$

gültig. Daraus folgt die Darstellung

$$\log(2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

$\square$

Rechenregeln für Potenzreihen.

Satz: *Seien*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \textit{und} \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

Potenzreihen mit den Konvergenzradien $r_1 > 0$ *und* $r_2 > 0$. *Dann gilt:*

(a)

$$f(z) + g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) z^k, \qquad \textit{für } |z| < \min(r_1, r_2);$$

(b)

$$\lambda \cdot f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda a_k z^k, \qquad \textit{für } |z| < r_1 \textit{ und mit } \lambda \in \mathbb{C};$$

(c) Cauchy-Produkt für Potenzreihen

$$f(z) \cdot g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{k} a_\ell b_{k-\ell} \right) z^k, \qquad \textit{für } |z| < \min(r_1, r_2). \qquad \square$$

Weitere Rechenregeln für Potenzreihen.

Satz: *Seien* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *und* $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ *Potenzreihen. Dann:*

(d) Ist $f(0) = 0$, *so läßt sich die Potenzreihe* $f(z)$ *in die Potenzreihe* $g(z)$ *einsetzen, d.h. es gibt ein* $r_3 > 0$ *und eindeutige Koeffizienten* $c_k \in \mathbb{C}$ *mit*

$$(g \circ f)(z) = g(f(z)) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \qquad \text{für } |z| < r_3;$$

(e) Ist $f(0) \neq 0$, *so besitzt die Funktion* $1/f(z)$ *eine Potenzreihenentwicklung, d.h. es gibt ein* $r_4 > 0$ *und eindeutige Koeffizienten* $d_k \in \mathbb{C}$ *mit*

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k, \qquad \text{für } |z| < r_4;$$

die sich nach dem Cauchy-Produkt in (c) wie folgt rekursiv berechnen.

$$a_0 d_0 = 1, \qquad a_0 d_k = -\sum_{\ell=0}^{k-1} d_\ell a_{k-\ell}, \qquad \text{für } k = 1, 2, \ldots . \qquad \square$$

Beispiele zu den Rechenregeln für Potenzreihen.

Beispiel 1. Wir definieren den cosinus hyperbolicus für $x \in \mathbb{R}$ mit

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

und ersetzen e^x durch die Potenzreihe $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \cosh(x) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-x)^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}x^{2k} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Analog erhält für $x \in \mathbb{R}$ den sinus hyperbolicus mit

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1}, \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Beispiele zu den Rechenregeln für Potenzreihen.

Beispiel 2. Für

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{1-x}, \qquad -1 < x < 1,$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(x)}{1-x} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}\right) \cdot \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} x^{\ell}\right) \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \ldots\right) \cdot (1 + x + x^2 + \ldots) \\
&= 1 + x + \left(1 - \frac{1}{2!}\right) x^2 + \left(1 - \frac{1}{2!}\right) x^3 \\
&\quad + \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}\right) x^4 + \ldots \qquad \text{für } -1 < x < 1.
\end{aligned}$$

$\square$

Beispiele zu den Rechenregeln für Potenzreihen.

Beispiel 3. Wir setzen

$$g(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

Dabei lautet die Potenzreihe des Nenners

$$e^x - 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^{k+1}, \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Zur Potenzreihenentwicklung von $g(x)$ verwenden wir den Ansatz

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k, \qquad \text{für } x \in R,$$

und damit gilt

$$1 = \frac{e^x - 1}{x} \cdot g(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^k \right) \cdot \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_\ell}{\ell!} x^\ell \right)$$

Fortsetzung von Beispiel 3.

$$1 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^k\right) \cdot \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_\ell}{\ell!} x^\ell\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{k} \frac{B_\ell}{\ell!(k-\ell+1)!}\right) x^k.$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$\sum_{\ell=0}^{k} \frac{B_\ell}{\ell!(k-\ell+1)!} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0; \\ 0 & \text{für } k > 0. \end{cases}$$

Damit bekommt man

$$B_0 = 1, \qquad B_k = -\sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{k!}{\ell!(k-\ell+1)!} B_\ell \qquad \text{für } k = 1, 2, \ldots.$$

Die Zahlen B_k nennt man Bernoullische Zahlen:

$$B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_3 = 0,\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_5 = 0,\ B_6 = \frac{1}{42}, \ldots, \qquad \square$$

7.3 Elementare Funktionen

Die Exponentialfunktion ist für $z \in \mathbb{C}$ definiert durch

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k,$$

hat Konvergenzradius $r = \infty$, und daher ist $\exp(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ stetig.

Für reelle Argumente ist $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar mit

$$\frac{d}{dx} \exp(x) = \exp(x), \qquad \exp(0) = 1.$$

Anfangswertproblem für gewöhnliche Differentialgleichung.

Suche zu $a \in \mathbb{R}$ eine Funktion $y(x)$ mit

$$y'(x) = a \cdot y(x), \qquad y(x_0) = y_0$$

Die (eindeutige) Lösung dieses Anfangswertproblems ist gegeben durch

$$y(x) = y_0 \cdot \exp(a \cdot (x - x_0)). \qquad \square$$

Eigenschaften der Exponentialfunktion.

Funktionalgleichung: Es gilt

$$\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w) \qquad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C}.$$

Folgerung: *Für die Exponentialfunktion gilt:*

(a) $\exp(z) \neq 0$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$;

(b) $\exp(-z) = 1/\exp(z)$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$;

(c) $\exp(x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$;

(d) Asymptotisches Verhalten für $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = \infty, \qquad \textit{und} \qquad \lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$$

Beweis: (a),(b): Mit Funktionalgleichung gilt $\exp(z) \cdot \exp(-z) = \exp(0) = 1$.
(c): $\exp(x)$ ist stetig, hat keine Nullstelle, und es gilt $\exp(0) = 1$.
(d): Für $x > 0$ gilt $\exp(x) > 1 + x \to \infty$, $x \to \infty$.
Mit $\exp(x) \cdot \exp(-x) = 1$ folgt daraus $\lim_{x \to \infty} \exp(-x) = 0$. ∎

Weitere Eigenschaften der Exponentialfunktion.

Satz: *Für die Exponentialfunktion gilt weiterhin:*

(e)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{\exp(x)} = 0 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(f) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton wachsend mit* $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$.

(g) Für die Eulersche Zahl $e := \exp(1)$ *gilt:*

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$e = 2.7182\,81828\,45904\,52353\,60287\,\ldots$$

Die Eulersche Zahl e *ist eine* irrationale Zahl.

(h) Es gilt $\exp(q \cdot x) = (\exp(x))^q$ *für alle* $q \in \mathbb{Q}$ *und* $x \in \mathbb{R}$.

Beweise zu den weiteren Eigenschaften von $\exp$.

Beweis: (e): Mit der Regel von l'Hospital gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{\exp(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{\exp(x)} = \ldots = \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{\exp(x)} = 0.$$

(f): folgt zusammen mit Eigenschaften (c),(d) aus

$$\frac{d}{dx}\exp(x) = \exp(x) > 0$$

(g): Folgt mit

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\cdot\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

und der Regel von l'Hospital für

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{x\searrow 0}\frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\searrow 0}\frac{1}{1+x} = 1.$$

(h): Es gilt $\exp(nz) = (\exp(z))^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Somit gilt $\exp(x/m) = \sqrt[m]{\exp(x)}$ für $m \in \mathbb{N}$ sowie $\exp(\frac{n}{m}x) = (\exp(x))^{n/m}$ für $n, m \in \mathbb{N}$. $\square$

Der natürliche Logarithmus.

Da die Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist, besitzt

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$$

eine eindeutige Umkehrfunktion,

$$\log : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Diese Umkehrfunktion nennt man den `natürlichen Logarithmus`.

Eigenschaften des natürlichen Logarithmus:

(a) $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und stetig.

(b) Es gilt: $\lim_{x \to 0+} \log(x) = -\infty$ und $\lim_{x \to \infty} \log(x) = \infty$.

(c) Es gilt die `Funktionalgleichung`

$$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y) \qquad \text{für alle } x, y > 0.$$

$\square$

Weitere Eigenschaften des Logarithmus.

(d) Potenz:

$$\log(x^q) = q \cdot \log(x) \qquad \text{für alle } x > 0,\ q \in \mathbb{Q}.$$

(e) Spezielle Funktionswerte:

$$\log(1) = 0 \quad \text{und} \quad \log(e) = 1$$

(f) Der natürliche Logarithmus ist auf $(0, \infty)$ differenzierbar mit

$$\frac{d}{dx} \log(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{für alle } x > 0.$$

(g) Es gilt die Potenzreihenentwicklung

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \qquad \text{für } -1 < x < 1.$$

$\square$

Die allgemeine Potenzfunktion.

Für $a > 0$ und $q \in \mathbb{Q}$ hatten wir:

$$a^q = \exp(q \cdot \log(a))$$

Wir definieren daher allgemeine Potenzen wie folgt.

$$a^z := \exp(z \cdot \log(a)) \qquad \text{für } a > 0,\ z \in \mathbb{C}.$$

Eigenschaften der allgemeinen Potenzfunktion.

(a) Die Funktion $f(x) = a^x$ ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend für $a > 1$ und streng monoton fallend für $0 < a < 1$.

(b) Es gilt

$$a^0 = 1, \quad a^1 = a, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x},$$

sowie

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}.$$

$\square$

Weitere Eigenschaften der allgemeinen Potenz.

(c) Für $a \neq 1$ besitzt $y = a^x$ eine Umkehrfunktion

$$y(x) = \log_a(x)$$

den Logarithmus zur Basis a, wobei gilt

$$\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)} \qquad \text{für } x > 0.$$

(d) Es gelten die Differentiationsregeln

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(a^x) &= \log(a) \cdot a^x && \text{für } x \in \mathbb{R},\ a > 0 \\ \frac{d}{dx}(x^a) &= a \cdot x^{a-1} && \text{für } a \in \mathbb{R},\ x > 0 \\ \frac{d}{dx}(\log_a x) &= \frac{1}{x \cdot \log(a)} && \text{für } x, a > 0. \end{aligned}$$

$\square$

Verallgemeinerung des binomischen Lehrsatzes.

Satz: *Es gilt*

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k \qquad \text{für } a \in \mathbb{R},\ -1 < x < 1,$$

mit

$$\binom{a}{k} := \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (a-j) \qquad \text{für } k \geq 0.$$

Beweisidee: Rechte Seite löst Differentialgleichung $(1+x)g'(x) = a \cdot g(x)$. $\square$

Spezialfälle. Für $-1 < x < 1$ gelten die Entwicklungen

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 \pm \ldots \\ \frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 \mp \ldots \end{aligned}$$

Die trigonometrischen Funktionen.

Wir setzen für $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \sin(z) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \\ \cos(z) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \end{aligned}$$

Die Funktionen sin und cos besitzen jeweils Konvergenzradius $r = \infty$, sind somit auf ganz $\mathbb{C}$ erklärt und dort stetig.

Eigenschaften:

(a) sin ist eine ungerade, cos eine gerade Funktion, d.h. es gilt

$$\sin(-z) = -\sin(z) \quad \text{und} \quad \cos(-z) = \cos(z) \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

(b) Weiterhin gilt: $\sin(0) = 0$ und $\cos(0) = 1$. □

Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen.

(c) Es gilt:

$$
\begin{aligned}
e^{iz} &= \cos(z) + i\sin(z) \quad \text{und} \quad e^{-iz} = \cos(z) - i\sin(z)\\
\sin(z) &= \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = (\sin(x)\cosh(y)) + i(\cos(x)\sinh(y))\\
\cos(z) &= \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = (\cos(x)\cosh(y)) - i(\sin(x)\sinh(y))\\
\sin^2(z) + \cos^2(z) &= 1.
\end{aligned}
$$

(d) Es gelten die Funktionalgleichungen

$$
\begin{aligned}
\sin(u+v) &= \sin(u)\cos(v) + \cos(u)\sin(v),\\
\cos(u+v) &= \cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v).
\end{aligned}
$$

(e) Für die *reellen* Ableitungen bekommt man

$$
\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x).
$$

Tangens- und Kotangensfunktion.

Wir setzen für $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \tan(z) &:= \frac{\sin(z)}{\cos(z)} \qquad \text{für } z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ \cot(z) &:= \frac{\cos(z)}{\sin(z)} \qquad \text{für } z \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Eigenschaften:

(a) tan und cot sind π-periodische, ungerade Funktionen.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} \tan(z) &= -i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} \qquad \text{für } z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ \cot(z) &= i\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} \qquad \text{für } z \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Reihen-Entwicklung von Tangens und Kotangens.

Es gelten die Reihen-Entwicklungen

$$\begin{aligned}\tan(z) &= z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \dots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!}|B_{2k}|z^{2k-1} \qquad \text{für } |z| < \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cot(z) &= \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{1}{45}z^3 - \frac{2}{945}z^5 - \frac{1}{4725}z^7 - \dots \\ &= \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(2k)!}|B_{2k}|z^{2k-1} \qquad \text{für } 0 < |z| < \pi\end{aligned}$$

mit den Bernoullischen Zahlen B_{2k}. □

Reelle Ableitungen: Im jeweiligen Definitionsbereich gilt

$$\frac{d}{dx}\tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \qquad \text{und} \qquad \frac{d}{dx}\cot(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}.$$

Hyperbolische Funktionen.

Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir

$$\begin{aligned}\cosh(z) &:= \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right)\\ \sinh(z) &:= \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right)\end{aligned}$$

mit den entsprechenden Potenzreihenentwicklungen

$$\begin{aligned}\cosh(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} z^{2k} \qquad \text{für } z \in \mathbb{C},\\ \sinh(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1} \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}.\end{aligned}$$

$\square$

Eigenschaften der hyperbolischen Funktionen.

(a) Die Funktion cosh ist gerade und sinh ist ungerade, d.h. es gilt

$$\cosh(-z) = \cosh(z) \quad \text{und} \quad \sinh(-z) = -\sinh(z) \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

(b) Für die Ableitungen der hyperbolischen Funktionen gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\cosh(x) &= \sinh(x) \\ \frac{d}{dx}\sinh(x) &= \cosh(x) \end{aligned}$$

(c) Es gelten die Funktionalgleichungen

$$\begin{aligned} \sinh(x+y) &= \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y) \\ \cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) \end{aligned}$$

(d) Es gilt die algebraische Relation

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1. \qquad \square$$

Inverse hyperbolische Funktionen, Areafunktionen.

Die Funktion sinh ist streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$,
die Funktion cosh ist streng monoton wachsend auf $[0, \infty)$.

Die jeweiligen Umkehrfunktionen bezeichnen wir mit `arcosh` und `arsinh`.

Es gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{arsinh}(x) &= \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) && \text{für } x \in \mathbb{R} \\ \operatorname{arcosh}(x) &= \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) && \text{für } 1 \le x < \infty \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\operatorname{arsinh}(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} && \text{für } x \in \mathbb{R} \\ \frac{d}{dx}\operatorname{arcosh}(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} && \text{für } 1 \le x < \infty \end{aligned}$$

$\square$