Analysis I / Sitzung IX

① Notwendige Bedingung für lokales Maximum:

- Sei x_0 lokale Maximalstelle, x_0 kein Randpunkt
- $\Rightarrow \exists\, U_\varepsilon(x_0) \subset I$ mit $f(x_0) - f(x) \geq 0 \quad \forall x \in U_\varepsilon(x_0)$
- $\Rightarrow f'(x_0) = \lim\limits_{x \searrow x_0} \dfrac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq 0$

  $f'(x_0) = \lim\limits_{x \nearrow x_0} \dfrac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \geq 0$
- $\Rightarrow f'(x_0) = 0$ $\boxtimes$

② Hinreichende Bedingung für lokales Minimum:

- Betrachte Taylor-Polynom $T_1(x)$

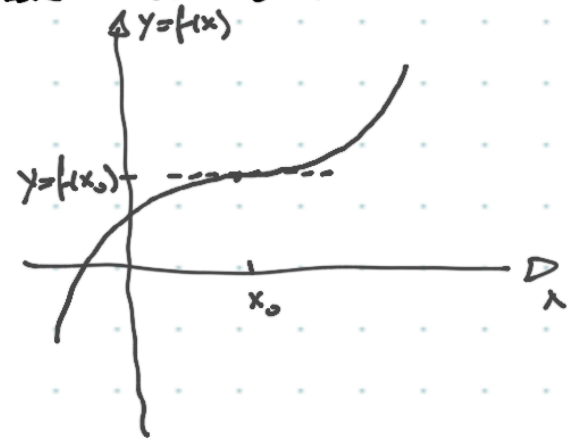
  $$f(x) = T_1(x) + R_1(x_0)$$

  $$= f(x_0) + R_1(x_0)$$
- $\Rightarrow f(x) - f(x_0) = \dfrac{f''(x_0 + \vartheta(x - x_0))}{2!}(x - x_0)^2$
- $(x - x_0)^2 > 0$ falls $x \neq x_0$
- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$ für $x \in U_\rho(x_0) \Rightarrow \dfrac{f''(x_0 + \vartheta(x - x_0))}{2!} > 0$

- $\Rightarrow f(x) - f(x_0) > 0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$ in $U_\delta(x_0)$
- d.h. f nimmt in x_0 lokales Minimum an. $\boxtimes$

- Sei nun $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ und $f^{(3)}(x_0) \neq 0$

  $\Rightarrow (x-x_0)^3$ wechselt beim passieren von x_0 das Vorzeichen



- Es gilt: da

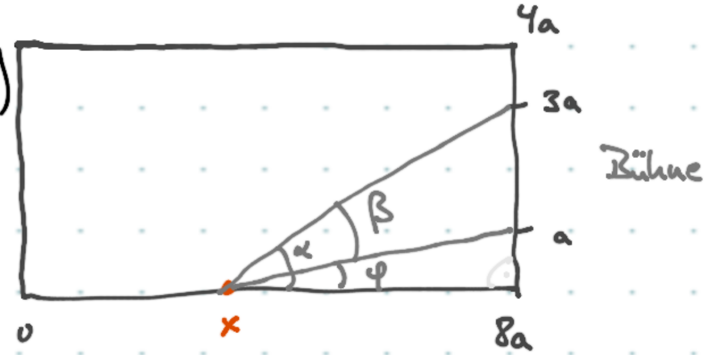
$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2}_{=0} +$$

$$\frac{1}{3!} \underbrace{f^{(3)}(x_0 + \vartheta(x-x_0))}_{\neq 0}(x-x_0)^3$$

- f schneidet die Tangente $y = f(x_0)$ in $x_0 \Rightarrow x_0$ Wendepunkt.

$\boxtimes$

③ Optimale Sitzposition:



Ziel: β maximal (großer Blickwinkel)

→ bestimme x optimal

Wir wissen:

β ist maximal, wenn $\beta'(x) = 0$ und $\beta''(x) < 0$.

Wie bestimme ich $\beta(x)$? $\qquad \beta(x) = \alpha(x) - \varphi(x)$

$$\Rightarrow \beta(x) = \arctan \frac{3a}{8a-x} - \arctan \frac{a}{8a-x}$$

Mit Hilfe einer Formelsammlung:

$$\beta'(x) = \frac{3a}{(8a-x)^2 + 9a^2} - \frac{a}{(8a-x)^2 - a^2} \overset{!}{=} 0$$

$$\vdots$$

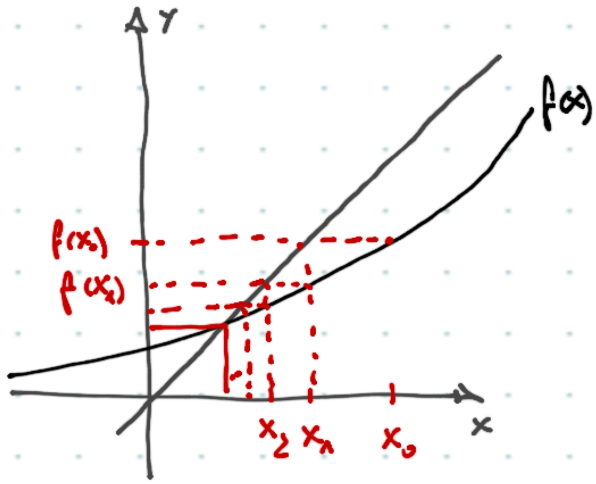
$$x_{1/2} = 8a \pm \sqrt{3}\,a$$

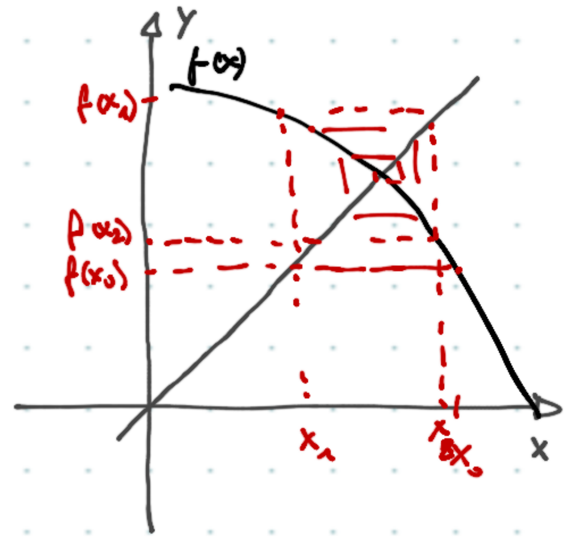
Da wir die Lösung in $[0, 8a]$ suchen, ist $x_0 = 8a - \sqrt{3}\,a$ die Lösung.

Prüfe ob $\beta''(x_0) < 0$: $\qquad \beta''(x) = \dfrac{6a(8a-x)}{((8a-x)^2+9a^2)^2} - \dfrac{2a(8a-x)}{((8a-x)^2+a^2)^2}$

Nachrechnen ergibt: $\beta''(18 - \sqrt{3}\,a)) = -\dfrac{\sqrt{3}}{12a^2} < 0$.

(4) Banachscher Fixpunktsatz:





Beweisidee:

- Es gilt: $|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \le k\,|x_n - x_{n-1}|$ $\quad n = 1, 2, 3 \dots$
- Also auch: $|x_{n+1} - x_n| \le k\,|x_n - x_{n-1}| \le k^2\,|x_{n-1} - x_{n-2}| \dots \le k^n\,|x_1 - x_0|$
- $n < m$: $\quad |x_m - x_n| \le \dfrac{k^n}{1-k}\,|x_1 - x_0|$
- Da $|k| < 1$: $\quad k^n \to 0$ für $n \to \infty$

  Daher: $\exists\, n_0 : \forall m, n \ge n_0$ und vorgegebenes $\varepsilon > 0 : |x_m - x_n| < \varepsilon$
- Da dies für alle $m > n \ge n_0$ gilt, konvergiert (x_n) nach dem Konvergenzsatz von Cauchy gegen einen Grenzwert $\bar{x}$.
- Zeige: $\bar{x}$ ist Fixpunkt!

$$|\bar{x} - f(\bar{x})| = |\bar{x} - x_n + x_n - f(\bar{x})| \leq |\bar{x} - x_n| + |x_n - f(\bar{x})|$$

$$= |\bar{x} - x_n| + |f(x_{n-1}) - f(\bar{x})|$$

$$\leq |\bar{x} - x_n| + k|x_{n-1} - \bar{x}| \longrightarrow 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

- <u>Eindeutigkeit:</u> Annahme $\bar{x}$ und $\bar{\bar{x}}$ sind beides Fixpunkte von $x = f(x)$.

Wäre $\bar{x} \neq \bar{\bar{x}}$: $|\bar{x} - \bar{\bar{x}}| = |f(\bar{x}) - f(\bar{\bar{x}})| \leq k|\bar{x} - \bar{\bar{x}}| < |\bar{x} - \bar{\bar{x}}|$ da $k<1$ ↯

$\Rightarrow \bar{x} = \bar{\bar{x}}$

$\boxtimes$