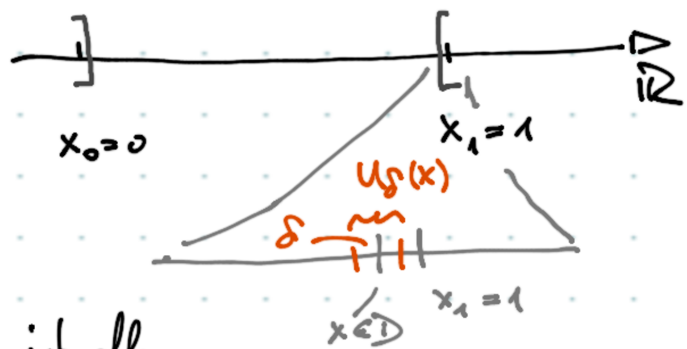
Analysis I Sitzung IV

① Offene Mengen:

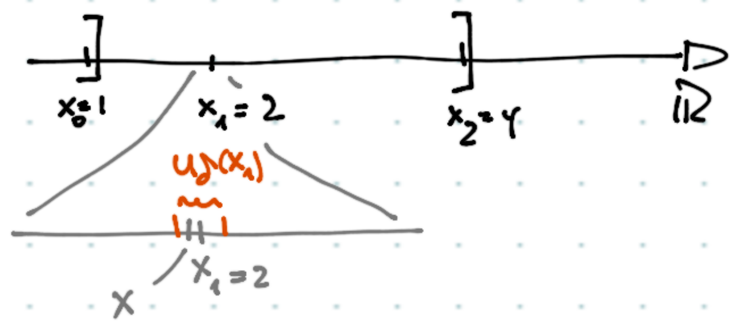
offenes Intervall $]0,1[= D \subset \mathbb{R}$



Eigenschaft:

Die Vereinigung offener Mengen ist offen.

Häufungspunkte:



Sowohl x_0 als auch x_1 und x_2 und alle $x \in D$ sind Häufungspunkte in D.

a) $D = \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \}$: hat einen Häufungspunkt $a = 0$

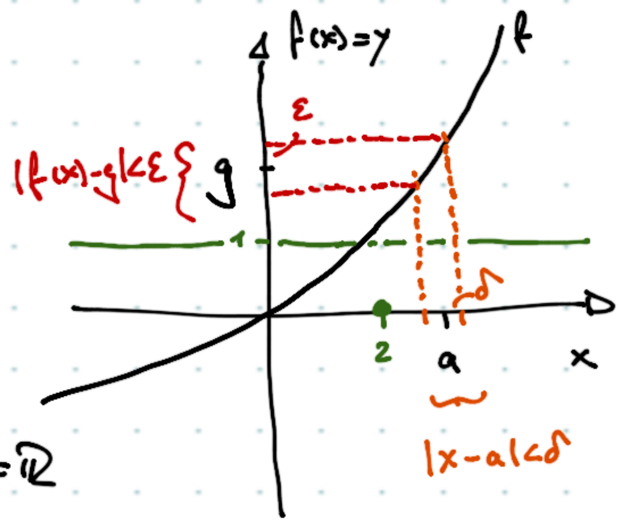
b) $D = [0,3] \subset \mathbb{R}$: jedes Element in D ist Häufungspkt.

c) $D =]0,1] \subset \mathbb{R}$: jedes Element aus $[0,1]$ ist Häufungspkt.

Innere Punkte:

$D =]0,1[$ offene Menge in $\mathbb{R}$: jedes Element in D ist innerer Punkt.

② Grenzwert:



a) Sei $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \neq 2 \\ 0 & \text{für } x = 2 \end{cases}$, $D = \mathbb{R}$

Grenzwert an $a = 2$: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$

b) Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Der Grenzwert von f an der Stelle $a = 0$ existiert und es gilt

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

Denn : für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$|f(x) - 0| = |f(x)| = |x| \cdot \underbrace{|\sin\left(\tfrac{1}{x}\right)|}_{[0,1]} \leq |x|$$

Damit : $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ |x| < \delta, \ x \neq 0 \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$ ☒

③ Links- bzw. Rechtsseitigen Grenzwert:

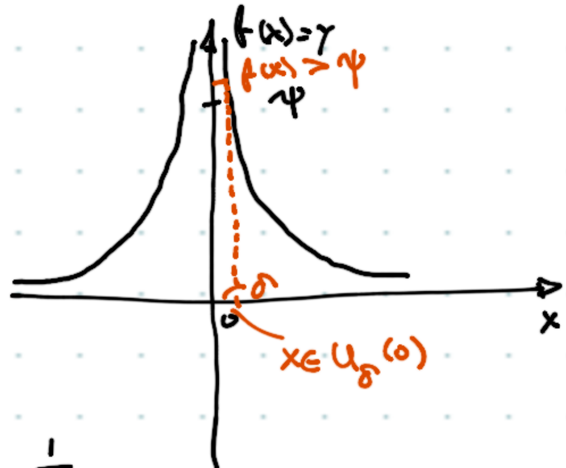
$f(x) = \lceil x \rceil$ "entier" / "roof"-Funktion

$$\lceil x \rceil = p \text{ mit } p \in \mathbb{Z}, \; p = \max_{q \in \mathbb{Z}} \{ q \le x \}$$

$$\lim_{x \nearrow 1} \lceil x \rceil = 0 \; *$$

$$\lim_{x \searrow 1} \lceil x \rceil = 1$$

④ uneigentlicher Grenzwert:



Betrachte: $f(x) = \frac{1}{x^2}$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$$

Denn: zu jedem ψ gibt es ein $\delta = \frac{1}{\psi}$

dann gilt: $|x| < \delta$: $f(x) > \frac{1}{\delta^2} = \psi^2 > \psi$ für $\psi >> 0$

insbesondere $\psi > 1$

(5) Konvergenzordnung:

a) Betrachte $f(x) = \tan x$. Für $x \to 0$ verschwindet $\tan x$ mit der Ordnung 1

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

b) Betrachte: $\lim_{x \to \infty} \frac{x^k}{e^x} = 0$ $k \in \mathbb{N}$, d.h. e^x strebt mit höherer Ordnung gegen ∞ als jede Potenz von x.

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^k} = \infty$$

Wegen der Eigenschaft als Umkehrfunktion von e^x gilt für $\ln x$:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^k} = 0 \qquad k \in \mathbb{N}$$