Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2020/21**
Prof. Dr. J. Behrens
Dr. K. Rothe ©

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6

Aufgabe 21:

a) Für das Polynom $p_3(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 5$ berechne man das Taylor-Polynom $T_3(x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 4$ unter Verwendung

(i) des Horner-Schemas und

(ii) der Ableitungsregeln für die Koeffizienten.

b) Gegeben sei die durch $f(x) = \cos(x^2 - \pi^2)$ definierte Funktion.

(i) Man berechne das Taylor-Polynom $T_2(x; x_0)$ von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = \pi$.

(ii) Man schätze den Fehler zwischen $f\,(3)$ und $T_2\,(3; \pi)$ mit Hilfe der Restgliedformel von Lagrange nach oben ab.

Aufgabe 22:

a) Man bestimme den maximalen Definitionsbereich D, klassifiziere dort alle Extremwerte für die durch

$$f(x) = \sqrt{(x-7)(x^2 - 5x - 14)}$$

gegebene Funktion und zeichne den Funktionsgraphen von f.

b) Man bestimme für die durch

$$g(x) = \sinh(x)\sin(x)$$

gegebene Funktion im Intervall $[-4, 4]$ alle Wendepunkte und die Bereiche in denen g konvex bzw. konkav ist und zeichne den Funktionsgraphen von g.

Aufgabe 23:

Gegeben sei die durch $\Phi(x) = e^x - 2$ definierte Funktion.

a) Man zeige, dass Φ genau zwei Fixpunkte besitzt.

b) Man gebe ein Intervall D an, in dem die Fixpunktiteration

$$x_{k+1} = \Phi(x_k)\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

für jeden Startwert $x_0 \in D$ auf Grund des Fixpunktsatzes gegen einen Fixpunkt x^* konvergiert.

Wieviele Iterationsschritte n werden nach der a priori-Abschätzung für eine Genauigkeit von $|x_n - x^*| < 10^{-4}$ höchstens benötigt?

c) Man berechne den Fixpunkt mit einem absoluten Fehler von $|x_n - x^*| < 10^{-4}$.

Aufgabe 24:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - x - 6$, sowie die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die sich aus dem Newton-Verfahren zur Nullstellenberechnung von f mittels Startwert $x_0 \geq 3$ ergibt.

a) Man zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Nullstelle x^* konvergiert und berechne diese.

b) Man zeige, dass die Folge (lokal) quadratisch konvergiert, d.h. es gibt eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit

$$|x_{n+1} - x^*| \leq c|x_n - x^*|^2\,.$$

c) Man berechne ausgehend vom Startwert $x_0 = 4$ eine Nullstelle x^* mit

$$|x_n - x^*| \leq 10^{-10}.$$

Fragen zur Vorlesung:

Betrachten Sie die Taylor-Formel für die Funktion $f(x) = \sin(x)$.

a) Nachdem Sie die Ableitungen der Funktion f hergeleitet haben als

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos(x), & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ (-1)^{\frac{n}{2}}\sin(x), & \text{falls } n \text{ gerade,} \end{cases}$$

so versichern Sie sich, dass die Darstellung $f^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$ ebenfalls gilt.

b) Schreiben Sie jetzt das Taylor-Polynom vom Grad m zum Entwicklungspunkt x_0 auf und leiten daraus die MacLaurin-Formel für $\sin(x)$ her. Welche Restgliedform wird verwendet?

c) Schätzen Sie nun ab, wie sich das Restglied der Taylor-Formel verhält, wenn einerseits $n \to \infty$ (wobei x fest gehalten wird) und andererseits $x \to \infty$ (mit n fest). Können Sie eine Konsequenz beschreiben für die Taylor-Formel der sin-Funktion?

Abgabetermin: 25.1. - 29.1.21 (zu Beginn der Übung)