Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2020/21**
Prof. Dr. J. Behrens
Dr. K. Rothe ©

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5

Aufgabe 17:

a) Man bestimme eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften $f(2) = 5$ und

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad -\infty < x < -1\,, \\ -1 & \text{für} \quad -1 < x < 1\,, \\ 2x & \text{für} \quad 1 < x < \infty \end{cases}$$

und zeichne die Funktion. Ist f auch differenzierbar?

b) Für die Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} \sin x\,, & x < \pi \\ ax + b\,, & \pi \leq x \end{cases}$$

bestimme man $a, b \in \mathbb{R}$, sodass f in $x_0 = \pi$ stetig differenzierbar wird und zeichne f.

c) Man berechne die Tangentengleichung zu $f(x) = \ln x$ im Punkt $x_0 = 1$ und fertige eine Zeichnung an.

Aufgabe 18:

a) Man berechne die erste Ableitung der folgenden Funktionen

$$\text{i) } f(x) = x - \sinh x \cosh x\,, \qquad \text{ii) } g(x) = (5x^2)^x\,.$$

b) Man berechne die ersten beiden Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\text{i) } h(x) = \frac{x^2}{x^4 + 1}\,, \qquad \text{ii) } k(x) = \ln(\cos x)\,.$$

c) Man berechne die ersten drei Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\text{i) } u(x) = 7(x-1)(x^2+x+1)\,, \qquad \text{ii) } v(x) = \sqrt{2-3x}\,.$$

Aufgabe 19:

a) Gegeben sei die Funktion

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x^2 + e^x - 5\,. \end{aligned}$$

(i) Man zeige mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass die Funktion f mindestens zwei Nullstellen besitzt.

(ii) Man zeige mit Hilfe des Satzes von Rolle, dass f höchstens zwei und damit dann genau zwei Nullstellen besitzt.

(iii) Man berechne die beiden Nullstellen x^* mit Hilfe des Bisektionsverfahrens aus Aufgabe 16 bis auf einen absoluten Fehler von $|\tilde{x} - x^*| \le 10^{-10}$.

b) Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{für } \ x < \pi/2\,, \\ (x-\pi/2)^2 + 1 & \text{für } \ \pi/2 \le x\,. \end{cases}$$

(i) Man berechne $f'(x)$ und $f''(x)$.

(ii) Ist der Mittelwertsatz

$$g'(x_0) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a} \quad \text{mit} \quad x_0 \in]a,b[$$

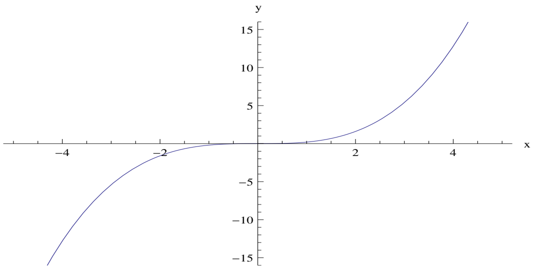
für $a = 0$ und $b = \pi$ auf $f(x)$ und $f'(x)$ anwendbar?
Man bestimme gegebenenfalls die Zwischenstelle(n) x_0.

Aufgabe 20:

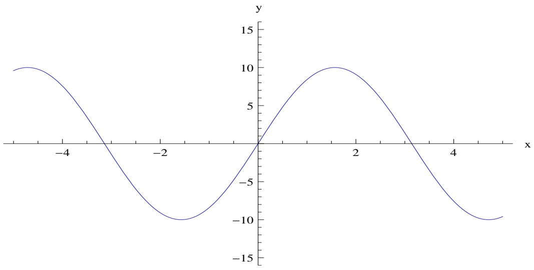
a) Man berechne die folgenden Grenzwerte

$$\text{(i) } \lim_{x\to 0} \frac{e^{(x^2)}-1}{1-\cos x}\,, \quad \text{(ii) } \lim_{x\to\infty} x \ln\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)\,.$$

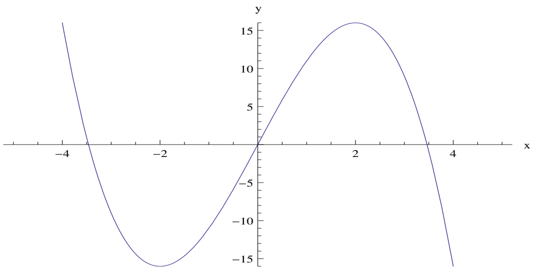
b) Nur die Ableitung $g'(x) = 3x^2 - 9$ ist von der reellwertigen Funktion g bekannt. Man gebe die Monotoniebereiche von g an und klassifiziere alle Extremwerte. Anschließend begründe man, welcher der unten angegebenen Funktionsgraphen g_i mit dem von g übereinstimmt.



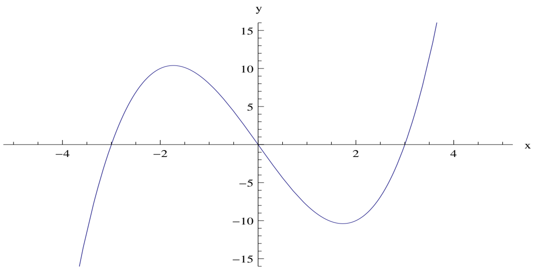
Funktion g_1



Funktion g_2



Funktion g_3



Funktion g_4

Fragen zur Vorlesung:
In dieser Aufgabe sollen die Konvexität einer Funktion f und der folgende Satz aus der Vorlesung aufgearbeitet werden.

Satz: Die Ableitung einer von unten konvexen differenzierbaren Funktion f ist monoton steigend.

Bemerkung: Analog kann man den Satz natürlich für von unten konkave differenzierbare Funktionen formulieren, deren Ableitung monoton fallend ist.

a) Begründen Sie warum die Konvexitätsbedingung

$$f(\alpha a + (1-\alpha)b) \leq \alpha f(a) + (1-\alpha) f(b), \qquad \alpha \in [0,1]$$

äquivalent ist zur Bedingung

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a), \qquad x \in [a,b].$$

b) Skizzieren und interpretieren Sie die Bedingungen aus a).

c) Warum folgt für eine im Definitionsbereich $[a,b]$ konvexe und zweimal differenzierbare Funktion f für $x_0 \in [a,b]$ aus dem obigen Satz $f''(x_0) \geq 0$?

Abgabetermin: 11.1. - 15.1.21 (zu Beginn der Übung)