Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2020/21**
Prof. Dr. J. Behrens
Dr. K. Rothe ©

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4

Aufgabe 13:

a) Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$D_1 = \,]7,10[\ , \quad D_2 = [-4,4] \cup \left\{ \frac{9n}{1-2n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} ,$$

$$D_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \le y \le 1 - x^2 \right\} .$$

Für jede Menge gebe man die Menge ihrer Häufungspunkte D' bzw. inneren Punkte D^0 an und kläre, ob die Menge abgeschlossen oder offen ist.

b) Man berechne die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \ln|x| - e^x$,

(ii) $\lim\limits_{x\to -1+} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x+1}}$,

(iii) $\lim\limits_{x\to\infty} 2x - \sqrt{4x^2 + 28x}$.

Aufgabe 14:

a) Man untersuche die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert:

$$a_n = \left(\frac{n^3 + 2n + 7}{2n^3 + 3n^2 + 8} \right)^4 , \qquad b_n = \sqrt{9n^2 + 252n} - \sqrt{9n^2 - 8} ,$$

$$c_n = \frac{n^2}{n+3} - \frac{n^3}{n^2+2} , \qquad d_n = \frac{8 \cdot 5^{n+2} + 4 \cdot 7^{n+1}}{2 \cdot 7^{n-1} - 3 \cdot 5^n} .$$

b) Man untersuche die folgenden rekursiv definierten Folgen auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert:

$$e_1 = 1 , \quad e_{n+1} = \frac{5 - 3e_n}{4} , \qquad f_1 = 2 , \quad f_{n+1} = \frac{13}{6 - f_n} ,$$

$$g_1 = 2 , \quad g_{n+1} = \sqrt{6 + g_n} .$$

Aufgabe 15:

a) Für die Funktionen mit den Abbildungsvorschriften

$$f_1(x) = \begin{cases} 2\cos x & , \quad x \leq 0 = x_0 \\ x^2 + 2 & , \quad 0 < x \end{cases} \quad , \quad f_2(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 6x - 7} \,, \quad x_0 = -1 \,,$$

$$f_3(x) = \begin{cases} e - x & , \quad x \leq e = x_0 \\ \ln x & , \quad e < x \end{cases} \quad , \quad f_4(x) = \begin{cases} -2x^2 + 8x - 5 & , \quad x \neq 2 \\ 1 & , \quad x = 2 = x_0 \end{cases}$$

zeichne man die Funktionsgraphen und berechne in x_0 links- und/oder rechtsseitige Grenzwerte und überprüfe damit, ob Stetigkeit oder stetige Ergänzbarkeit in x_0 vorliegt oder sich in x_0 eine Unstetigkeit beheben lässt.

b) Für die Funktion g mit

$$g(x) = \begin{cases} e^x & , \quad x \leq 0 \\ \sin(x + a) & , \quad 0 < x \end{cases}$$

bestimme man, falls dies möglich ist, $a \in \mathbb{R}$, so dass f in $x_0 = 0$ stetig wird.

Aufgabe 16:

Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Abbildungsvorschrift

$$f(x) = x^4 - \frac{218}{63}x^3 - \frac{14}{3}x^2 + \frac{218}{21}x + 5$$

berechne man mit Hilfe des Intervallhalbierungsverfahrens Näherungen $\tilde{x}$ für alle Nullstellen x^* bis auf einen absoluten Fehler von $|\tilde{x} - x^*| \leq 0.001$.

Fragen zur Vorlesung:

Sie erinnern sich, dass eine Zahlenfolge $(a_n) \in \mathbb{R}$ gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - a| < \epsilon$.

Ebenso erinnern Sie sich, dass eine reelle Zahlenfolge $(a_n) \in \mathbb{R}$ *Cauchy-Folge* heißt, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n, m \geq n_0$ gilt: $|a_n - a_m| < \epsilon$.

a) Erläutern Sie den Unterschied dieser beiden Definitionen anhand einer Skizze.

b) Das *Cauchysche Konvergenzkriterium* besagt, dass eine reelle Zahlenfolge (a_n) genau dann konvergiert, wenn (a_n) eine Cauchy-Folge ist. Hätten Sie eine Idee, wie sie die Implikation (a_n) konvergiert $\Rightarrow$ (a_n) ist Cauchy-Folge beweisen könnten?

Abgabetermin: 14.12. - 18.12.20 (zu Beginn der Übung)