Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2020/21**
Prof. Dr. J. Behrens
Dr. K. Rothe ©

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 3

Aufgabe 9:

a) Für die Funktion f mit $f(x) = x^4 - 16$ zeichne man den Funktionsgraphen und berechne alle Nullstellen $x \in \mathbb{C}$.

b) Man berechne die folgenden Ausdrücke und gebe sie in kartesischer Darstellung an

(i) $z_1 = 8 + i - (7i - 9)$,

(ii) $z_2 = 4i^9 + 8i^6 - 7i^3 + 3i^2 - 9i$,

(iii) $z_3 = \cos\left(\dfrac{-3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{-3\pi}{4}\right)$,

(iv) $z_4 = (8 + i)(7i - 9)$,

(v) $z_5 = \dfrac{8 + i}{7i - 9}$.

c) Gegeben seien die komplexen Zahlen

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3}\,, \quad z_2 = \sqrt{3} - i\,, \quad z_3 = \frac{2e^{7\pi i/6}e^{\pi i/3}}{e^{\pi i/2}}\,.$$

(i) Man berechne $z_1 + \bar{z}_2$, Re $(z_1 + z_2)$, Im $(\bar{z}_1 + z_2)$, $|z_1 + z_3|$.

(ii) Man bestimme die Polarkoordinatendarstellung von

$$z_1\,, \quad z_2\,, \quad z_3\,, \quad z_1^7\,, \quad \bar{z}_2^8\,, \quad \frac{z_1^7\bar{z}_2^8}{z_3^{14}}\,.$$

Lösung:

a) Unter Verwendung der Binomischen Formeln erhält man

$$f(x) = x^4 - 16 = (x^2 + 4)(x^2 - 4) = (x^2 + 4)(x - 2)(x + 2)$$

Die beiden reellen Nullstellen lauten $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

$x^2 + 4 = 0$ besitzt die beiden komplexen Nullstellen $x_3 = -2i$, $x_4 = 2i$.

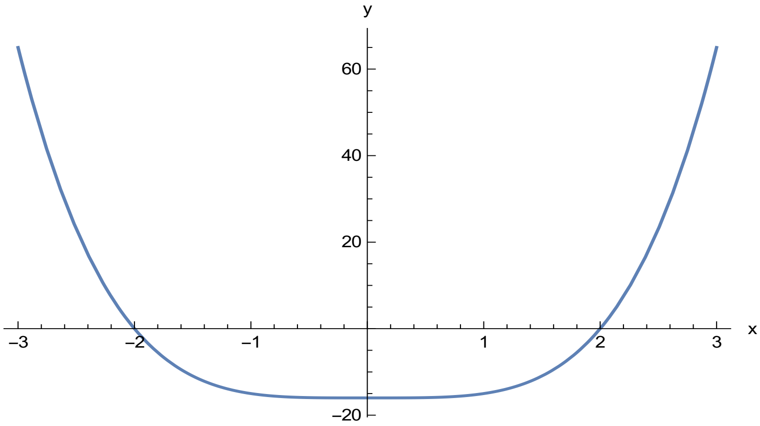


Bild 9 $f(x) = x^4 - 16$

b) (i) $z_1 = 8 + i - (7i - 9) = 17 - 6i$,

(ii) $z_2 = 4i^9 + 8i^6 - 7i^3 + 3i^2 - 9i = 4i - 8 + 7i - 3 - 9i = -11 + 2i$,

(iii) $z_3 = \cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$

(iv) $z_4 = (8 + i)(7i - 9) = 56i - 72 - 7 - 9i = -79 + 47i$,

(v) $z_5 = \frac{8 + i}{7i - 9} = \frac{(8 + i)(-7i - 9)}{(7i - 9)(-7i - 9)} = \frac{-56i - 72 + 7 - 9i}{130} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$

c) (i) $z_1 + \bar{z}_2 = 1 + i\sqrt{3} + \sqrt{3} + i = 1 + \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})$,

$$\mathrm{Re}\ (z_1 + z_2) = \mathrm{Re}\ (1 + i\sqrt{3} + \sqrt{3} - i) = 1 + \sqrt{3}\,,$$

$$\mathrm{Im}\ (\bar{z}_1 + z_2) = \mathrm{Im}\ (1 - i\sqrt{3} + \sqrt{3} - i) = -1 - \sqrt{3}\,,$$

$$z_3 = \frac{2e^{7\pi i/6}e^{\pi i/3}}{e^{\pi i/2}} = 2e^{\pi i(7/6+1/3-1/2)} = 2e^{\pi i} = -2$$

$$|z_1 + z_3| = |1 + i\sqrt{3} - 2| = |-1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\,.$$

(ii) Polarkoordinatendarstellung: $z = re^{i\varphi}$ mit $r > 0$ und $-\pi < \varphi \leq \pi$

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3}: \quad r = |z_1| = 2\,, \quad \varphi = \arctan\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad z_1 = 2e^{\pi i/3}$$

$$z_2 = \sqrt{3} - i: \quad r = |z_2| = 2\,, \quad \varphi = \arctan\frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad z_2 = 2e^{-\pi i/6}$$

$$z_3 = 2e^{\pi i}$$

$$z_1^7 = \left(2e^{\pi i/3}\right)^7 = 2^7e^{7\pi i/3} = 2^7e^{\pi i/3} \quad (= 2^6(1 + i\sqrt{3}))$$

$$\bar{z}_2^8 = \left(2e^{\pi i/6}\right)^8 = 2^8e^{8\pi i/6} = 2^8e^{4\pi i/3} = 2^8e^{-2\pi i/3} \quad (= 2^7(-1 - i\sqrt{3}))$$

$$\frac{z_1^7\bar{z}_2^8}{z_3^{14}} = \frac{2^7e^{\pi i/3}2^8e^{-2\pi i/3}}{2^{14}} = 2e^{-\pi i/3} \quad (= 1 - i\sqrt{3})\,.$$

Aufgabe 10:

a) Für die Funktion

$$f : [a, \infty[\to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad y = f(x) := x^2 - 6x + 11$$

bestimme man die kleinste Zahl a, so dass f eine Umkehrfunktion f^{-1} besitzt. Man berechne die Umkehrfunktion, gebe deren Definitions- und Wertebereich an und zeichne den Funktionsgraphen von f^{-1}.

b) Man entscheide, welche der folgenden Funktionen injektiv, surjektiv und bijektiv sind und zeichne die zugehörigen Funktionsgraphen:

(i) $f_1 : [-4, 4] \to [0, 5]$, $\quad f_1(x) = |3 - 2|x||$,

(ii) $f_2 : [1, \infty[\to [0, \infty[$, $\quad f_2(x) = \ln x$,

(iii) $f_3 : [-\pi/4, \pi/4] \to [-1, 1]$, $\quad f_3(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$,

(iv) $f_4 :]-1, 1[\to [-1, 1]$, $\quad f_4(x) = x^3$.

Lösung:

a) Mit quadratischer Ergänzung erhält man die Scheitelpunktform von f

$$f(x) = x^2 - 6x + 11 = (x - 3)^2 + 2$$

mit dem Scheitelpunkt $S = (x_s, f(x_s)) = (3, 2)$. Damit ist
$[a, \infty[= [x_s, \infty[= [3, \infty[$ das größte Intervall in dem f invertierbar ist.

Berechnung der Umkehrfunktion

$$y = (x - 3)^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \pm \sqrt{y - 2} \geq 3 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(y) = 3 + \sqrt{y - 2}\,.$$

Definitionsbereich $D_{f^{-1}} = [2, \infty[$, Wertebereich $W_{f^{-1}} = [3, \infty[$.

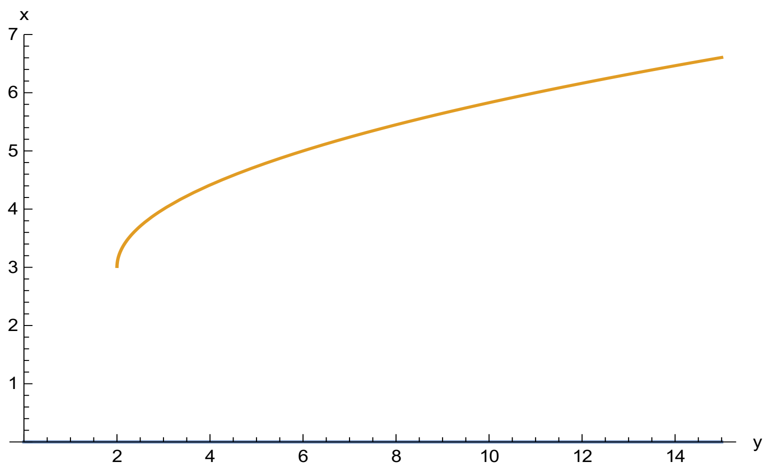


Bild 10.a $\quad f^{-1}(y) = 3 + \sqrt{y - 2}$

b) (i) f_1 ist surjektiv aber nicht injektiv

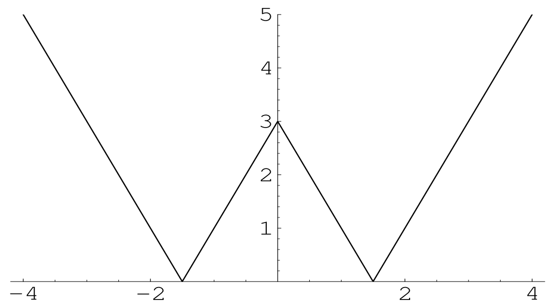


Bild 10.b.1 $f_1(x) = |3 - 2|x||$

(ii) f_2 ist bijektiv

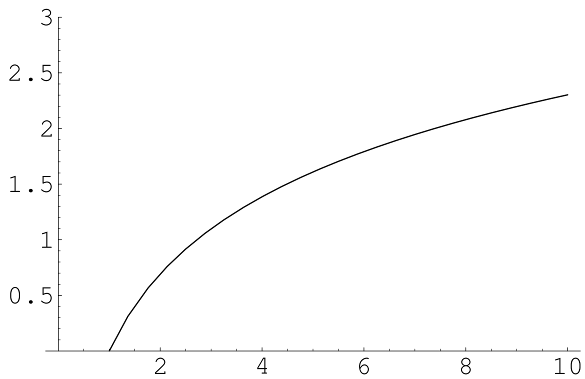


Bild 10.b.2 $f_2(x) = \ln x$

(iii) f_3 ist weder surjektiv noch injektiv

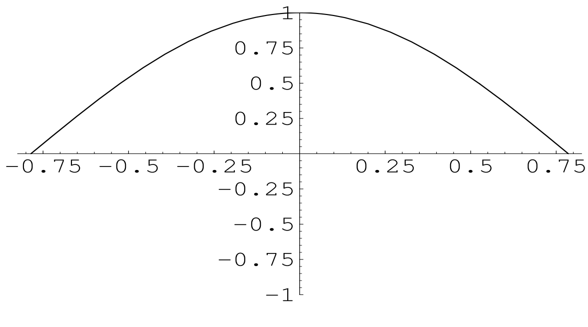


Bild 10.b.3 $f_3(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

(iv) f_4 ist injektiv aber nicht surjektiv

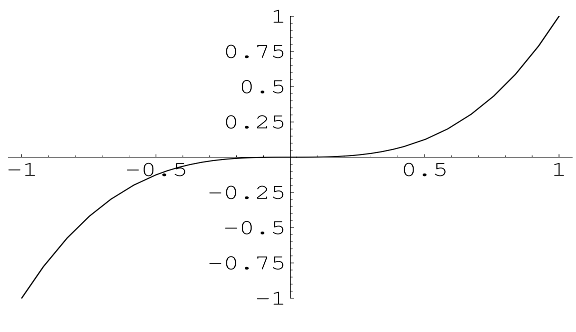
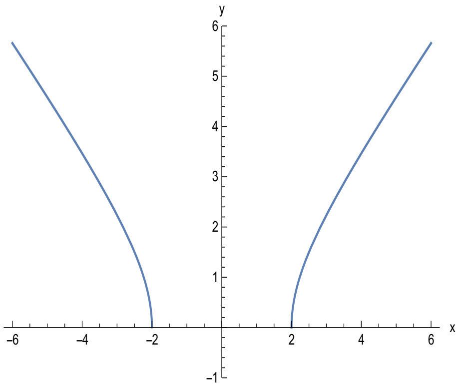
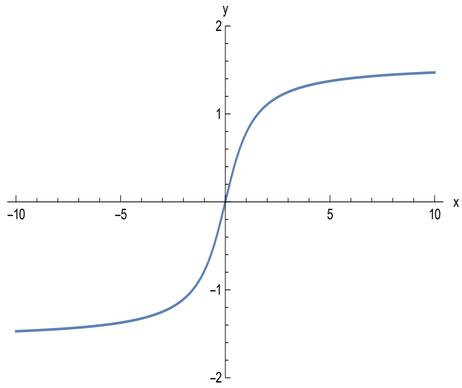


Bild 10.b.4 $f_4(x) = x^3$

Aufgabe 11:

Zu den Abbildungsvorschriften $f(x)$ und $g(x)$ seien die folgenden Funktionsgraphen gegeben:





$f(x) = ?$ $\qquad\qquad$ $g(x) = ?.$

a) Man begründe, welche der Abbildungsvorschriften

$$f_1(x) = \arctan(x)\,, \quad f_2(x) = \sqrt{|x|-2}\,, \quad f_3(x) = \sqrt{x^2-4}\,, \quad f_4(x) = \sqrt[3]{x}$$

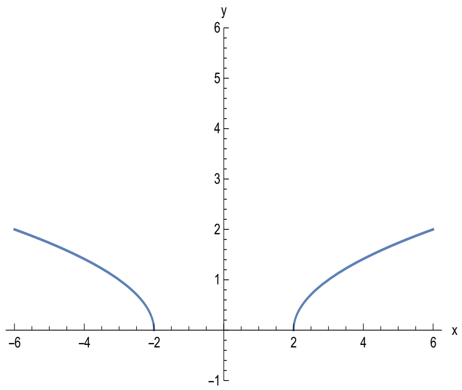
mit $f(x)$ und welche mit $g(x)$ übereinstimmt.

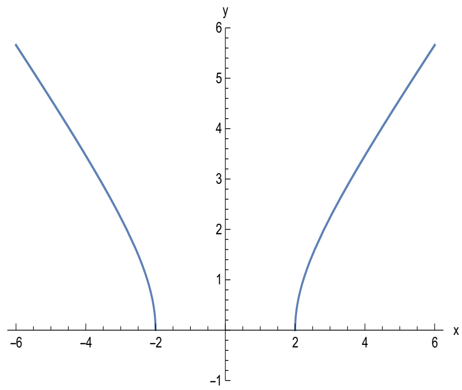
b) Man untersuche, ob es sich bei f und g um gerade, ungerade oder beschränkte Funktionen handelt.

c) Anhand der Funktionsgraphen von f und g gebe man die Bereiche an, in denen die Funktion monoton wächst oder fällt und konkav oder konvex (von unten) ist.

Lösung:

a) Aus dem Funktionsgraph von $f(x)$ folgt, dass f gerade ist.



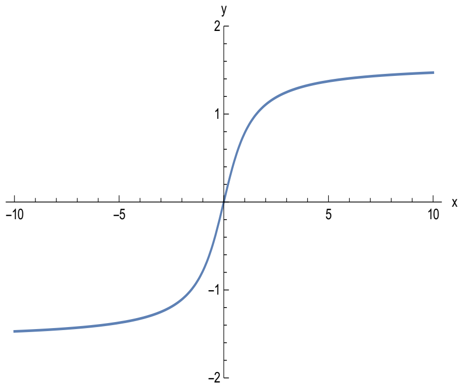


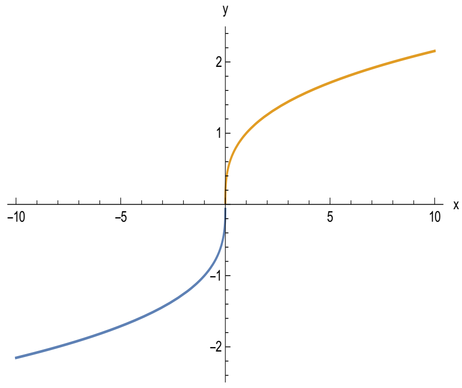
$f_2(x) = \sqrt{|x|-2}$ $\qquad\qquad$ $f(x) = f_3(x) = \sqrt{x^2-4}.$

Damit kommen nur die geraden Funktionen f_2 und f_3 in Frage.

Es gilt $f_2(6) = 2 < f(6)$. Damit muss $f(x) = f_3(x) = \sqrt{x^2-4}$ gelten.

Aus dem Funktionsgraph von $g(x)$ folgt, dass g ungerade ist.





$g(x) = f_1(x) = \arctan(x)$ $\qquad\qquad$ $f_4(x) = \sqrt[3]{x}$

Damit kommen nur die ungeraden Funktionen f_1 und f_4 in Frage.

Es gilt $f_4(8) = 2 > g(8)$. Damit muss $g(x) = f_1(x) = \arctan(x)$ gelten.

b) f ist nach unten beschränkt durch Null, denn $\quad f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \geq 0$.

f ist im Definitionsbereich $D =]-\infty, -2] \cup [2, \infty[$ gerade,

denn dort gilt $\quad f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 4} = \sqrt{x^2 - 4} = f(x)$.

Im Bereich $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ besitzt $x = h(y) = \tan(y)$ die Umkehrfunktion $y = h^{-1}(x) = g(x) = \arctan(x)$.

Daher ist g beschränkt mit $\quad -\dfrac{\pi}{2} < g(x) = \arctan(x) < \dfrac{\pi}{2}$.

$\tan(y)$ ist ungerade (vgl. $\sin$ und $\cos$), d.h. es gilt
$-x = -\tan(y) = \tan(-y) \;\Rightarrow\; \arctan(-x) = -y = -\arctan(x)$.

c) Im Intervall $]-\infty, -2]$ fällt f streng monoton und ist streng konkav von unten.

Im Intervall $[2, \infty[$ wächst f streng monoton und ist streng konkav von unten.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ wächst g streng monoton.

In $]-\infty, 0]$ ist g streng konvex von unten und
in $[0, \infty[$ streng konkav von unten.

Aufgabe 12:

a) Man vereinfache die folgende Abbildungsvorschrift

$$f(x) = \ln\sqrt{\frac{x^2-1}{x+2}} + \frac{1}{2}\ln(x+2) - \frac{1}{2}\ln(x-1) + \frac{3}{2}\ln(x+1)\,.$$

b) Für die unecht gebrochen rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^3-6x^2+8x+35}{x^2-8x+19}\,.$$

spalte man den polynomialen Anteil durch Polynomdivision ab.

c) Mit Hilfe der Eulerschen Formel und unter Verwendung von $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ bestätige man die Gültigkeit der Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \cos 4x &= 1 + 8\cos^4 x - 8\cos^2 x\,, \\ \sin 4x &= 8\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin x\,. \end{aligned}$$

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\sqrt{\frac{x^2-1}{x+2}} + \frac{1}{2}\ln(x+2) - \frac{1}{2}\ln(x-1) + \frac{3}{2}\ln(x+1) \\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{(x-1)(x+1)}{x+2} + \frac{1}{2}\ln(x+2) - \frac{1}{2}\ln(x-1) + \frac{3}{2}\ln(x+1) \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln(x-1) + \ln(x+1) - \ln(x+2)\right) + \frac{1}{2}\ln(x+2) - \frac{1}{2}\ln(x-1) + \frac{3}{2}\ln(x+1) \\ &= 2\ln(x+1) = \ln(x+1)^2\,. \end{aligned}$$

b)

$$(x^3-6x^2+8x+35) : (x^2-8x+19) = x + 2 + \frac{5x-3}{x^2-8x+19}$$

$$\begin{array}{lllll} -(x^3 & -8x^2 & +19x) & & \\ \hline & 2x^2 & -11x & +35 \\ & -(2x^2 & -16x & +38) \\ \hline & & 5x & -3 \end{array}$$

c) Mit der Eulerschen Formel $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ erhält man

$$\begin{aligned} \cos 4x + i\sin 4x &= e^{i4x} = \left(e^{ix}\right)^4 = (\cos x + i\sin x)^4 \\ &= \cos^4 x + 4i\cos^3 x\sin x - 6\cos^2 x\sin^2 x - 4i\cos x\sin^3 x + \sin^4 x \\ &= \cos^4 x - 6\cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x + i(4\cos^3 x\sin x - 4\cos x\sin^3 x)\,. \end{aligned}$$

Mit einem Koeffizientenvergleich und $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\cos 4x &= \cos^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x \\
&= \cos^4 x - 6\cos^2 x(1 - \cos^2 x) + (1 - \cos^2 x)^2 \\
&= 1 + 8\cos^4 x - 8\cos^2 x\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin 4x &= 4\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin^3 x \\
&= 4\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin x(1 - \cos^2 x) \\
&= 8\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin x\,.
\end{aligned}$$

Fragen zur Vorlesung:

Gegeben sei die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

a) Skizzieren Sie die Funktion. Gerne können Sie dafür ein Computerprogramm Ihrer Wahl verwenden. Aber auch Hand-Skizzen sind natürlich erlaubt.

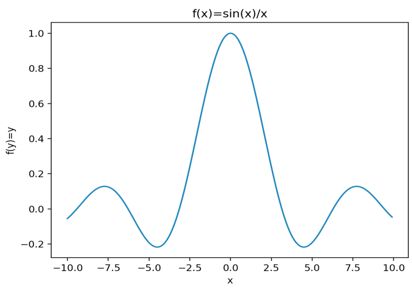
b) Bestimmen Sie den Definitionsbereich D der Funktion f. Ist die Funktion gerade oder ungerade?

c) Betrachten Sie die Menge $I := D \cap \mathbb{R}_0^+$, wobei $\mathbb{R}_0^+ = \{x : x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$. Ist die Menge I offen, oder abgeschlossen? Ist $a = 0$ ein Häufungspunkt der Menge I?

d) Ganz offensichtlich ist die Funktion f an der Stelle $x = 0$ nicht definiert. In direkter Umgebung dieser Stelle ist f jedoch durchaus auswertbar. Bestimmen Sie die Art der Unstetigkeit der Funktion f an $x = 0$.

Lösung:

a)



b) $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$; die Funktion ist gerade, denn es gilt

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} = \frac{-\sin(x)}{-x} = \frac{\sin(-x)}{-x} = f(-x).$$

c) I ist offen, da $I = \mathbb{R}_0^+\backslash\{0\}$. Die Null ist also kein Element von I, jedoch jede reelle Zahl $x > 0$. Gleichzeitig ist aber $a = 0$ natürlich ein Häufungspunkt der Menge I.

d) Für $x \to 0$ gilt $f(x) \to 1$ (Der Sinus konvergiert mit der Ordnung 1 gegen Null). Daher ist die Unstetigkeit von f an der Stelle Null hebbar. Wir können definieren:

$$f^\star(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$

Abgabetermin: 30.11. - 4.12.20 (zu Beginn der Übung)