Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2020/21**
Dr. K. Rothe ©

Analysis I

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 3

Komplexe Zahlen:

Definition

Für $x, y \in \mathbb{R}$ heißt eine Zahl z mit der Darstellung

$$z = x + iy$$

komplexe Zahl.

Die **imaginäre Einheit** i wird in der Regel definiert über

$$i^2 := -1.$$

Damit löst i die Gleichung

$$z^2 = -1$$

und man verwendet auch die symbolische Bezeichnung

$$i = \sqrt{-1}.$$

Die Menge der komplexen Zahlen wird bezeichnet mit

$$\mathbb{C} \ := \ \{ \, z = x + iy \, | \, x, y \in \mathbb{R} \, \} \, .$$

Die Zahlen x und y werden als

kartesische Koordinaten der Zahl z bezeichnet und

in der **komplexen Zahlenebene**

in einem rechtwinkligen Koordinatensystem

mit **reeller Achse** und **imaginärer Achse** abgetragen.

Bezeichnungen und Eigenschaften:

- $x =: \mathrm{Re}\,(z)\,,$ **Realteil** von z,
- $y =: \mathrm{Im}\,(z)\,,$ **Imaginärteil** von z,
- $\bar{z} := x - iy\,,$ zu z **konjugiert komplexe Zahl**
- $|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}\,,$ **Betrag** von z
- $z = x + iy = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \;\wedge\; y = 0$

Beispiele:

$$z = 1 + 4i\,, \qquad \mathrm{Re}\,(z) = 1\,, \quad \mathrm{Im}\,(z) = 4\,,$$

$$z = 3 - 2.35i\,, \qquad \mathrm{Re}\,(z) = 3\,, \quad \mathrm{Im}\,(z) = -2.35\,,$$

$$z = 67.3i\,, \qquad \mathrm{Re}\,(z) = 0\,, \quad \mathrm{Im}\,(z) = 67.3\,,$$

$$z = 42\,, \qquad \mathrm{Re}\,(z) = 42\,, \quad \mathrm{Im}\,(z) = 0\,.$$

Bemerkung:

Für $\mathrm{Im}\,(z) = 0$ ist $z = x \in \mathbb{R}$, also gilt $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Rechnen mit komplexen Zahlen:

$$z_1 = x_1 + iy_1\,, \quad z_2 = x_2 + iy_2$$

- **Addition/Subtraktion**

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

- **Multiplikation**

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(y_1x_2 + x_1y_2)$$

- **Division**

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} \\
&= \frac{(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2) \cdot (x_2 - iy_2)} \\
&= \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\
&= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}
\end{aligned}$$

Darstellung komplexer Zahlen in Polarkoordinaten

Jeder Punkt $z = x + iy \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ der komplexen Zahlenebene kann eindeutig beschrieben werden durch seinen **Abstand**

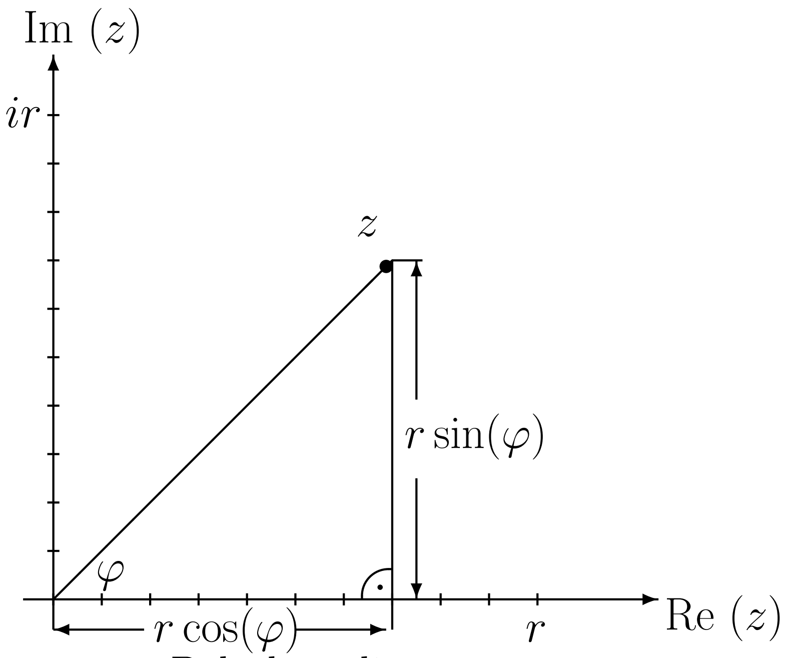
$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (> 0)$$

zum Nullpunkt und durch sein **Argument** φ

$$\text{also den Winkel,} \quad \text{mit} \quad -\pi \; < \; \varphi \; \leq \; \pi$$

zwischen seinem Ortsvektor (von 0 nach z) und der x-Achse.

Die Zahlen r und φ werden als **Polarkoordinaten** von z bezeichnet.



Polarkoordinaten von z

Es besteht also folgender Zusammenhang

zwischen kartesischen Koordinaten und Polarkoordinaten

$$z = x + iy = \underbrace{r\cos\varphi}_{=x} + i\,\underbrace{r\sin\varphi}_{=y} = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\ .$$

Wegen $\quad \dfrac{y}{x} = \dfrac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi} = \tan\varphi$

lässt sich der Winkel φ aus x und y wie folgt berechnen:

$$\varphi = \begin{cases} \arctan(y/x) + \pi & ,\ x < 0,\ y \geq 0 \\ \pi/2 & ,\ x = 0,\ y > 0 \\ \arctan(y/x) & ,\ x > 0, \\ -\pi/2 & ,\ x = 0,\ y < 0 \\ \arctan(y/x) - \pi & ,\ x < 0,\ y < 0\,. \end{cases}$$

Mit der abkürzenden Bezeichnung

$$e^{i\varphi} := \cos\varphi + i\sin\varphi$$

(**Eulersche Formel**) gelten für die Polardarstellung

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) = re^{i\varphi}$$

die Potenzrechengesetze (ergeben sich aus den Additionstheoremen von Sinus und Kosinus)

$$z_1 z_2 = \left(r_1 e^{i\varphi_1}\right)\left(r_2 e^{i\varphi_2}\right) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \quad z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi}$$

und die Gleichung $w^n = z = re^{i\varphi}$ besitzt genau die n Lösungen

$$w_k = \sqrt[n]{r}e^{i(\varphi+2k\pi)/n}\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Beispiel:

$w^2 = -1 = e^{i\pi} \quad \Rightarrow$

$w_0 \;=\; e^{i\pi/2} \;=\; i\,,$

$w_1 \;=\; e^{3i\pi/2} \;=\; e^{-i\pi/2} \;=\; -i$

Aufgabe 9:

a) Für die Funktion f mit

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 13x$$

zeichne man den Funktionsgraphen und berechne alle Nullstellen $x \in \mathbb{C}$.

Ausklammern ergibt:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 13x = x(x^2 - 4x + 13).$$

Eine Nullstelle lautet $x_1 = 0$.

Die übrigen erhält man durch quadratische Ergänzung

$$0 = x^2 - 4x + 13 = (x-2)^2 + 9 \quad \Rightarrow \quad (x-2)^2 = -9$$

$$\Rightarrow \quad x - 2 = \pm 3i \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2 + 3i\,,\ x_3 = 2 - 3i$$

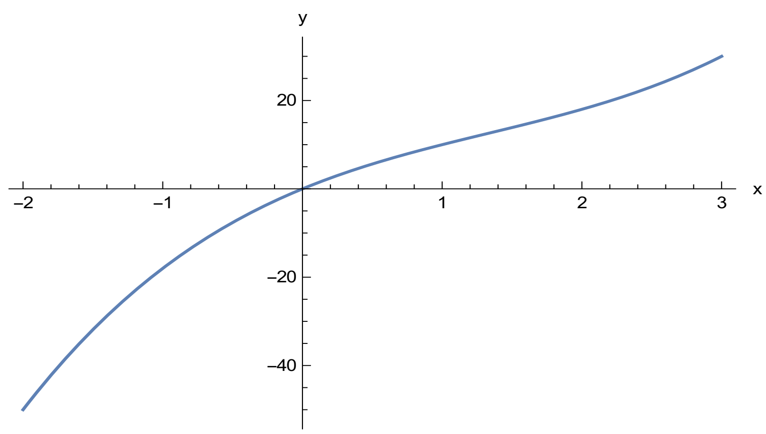


Bild 9 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 13x$

b) Man berechne die folgenden Ausdrücke und gebe sie in kartesischer Darstellung an

(i) $z_1 = 3 - 4i - (5 + 6i) \qquad = -2 - 10i\,,$

(ii) $z_2 = 3i^7 - 2i^5 + 6i^4 + 5i^2 + 4$

$= -3i - 2i + 6 - 5 + 4 = 5 - 5i\,,$

(iii) $z_3 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \qquad = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

(iv) $z_4 = (3 - 4i)(5 + 6i)$

$= 15 + 18i - 20i + 24 = 39 - 2i\,,$

(v) $z_5 = \dfrac{3 - 4i}{5 + 6i}$

$$= \frac{(3 - 4i)(5 - 6i)}{(5 + 6i)(5 - 6i)} = \frac{15 - 18i - 20i - 24}{61}$$

$$= -\frac{9}{61} - i\frac{38}{61}\,.$$

c) Gegeben seien die komplexen Zahlen

$$z_1 = 1 + i\,, \quad z_2 = -1 + i\,, \quad z_3 = i\,.$$

(i) Man berechne

$$\bar{z}_1 + z_2\,, \quad \mathrm{Re}\,(\bar{z}_2 + 3z_3)\,, \quad \mathrm{Im}\,(2z_1 + z_2)\,, \quad |z_1 + z_3|\,.$$

$$\bar{z}_1 + z_2 = 1 - i - 1 + i = 0\,,$$

$$\mathrm{Re}\,(\bar{z}_2 + 3z_3) = \mathrm{Re}\,(-1 - i + 3i) = \mathrm{Re}\,(-1 + 2i) = -1\,,$$

$$\mathrm{Im}\,(2z_1 + z_2) = \mathrm{Im}\,(2 + 2i - 1 + i) = \mathrm{Im}\,(1 + 3i) = 3\,,$$

$$|z_1 + z_3| = |1 + i + i| = |1 + 2i| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}\,.$$

(ii) Man bestimme die Polarkoordinatendarstellung von

$$z_1\,,\quad z_2\,,\quad z_3\,,\quad \bar{z}_1^6\,,\quad z_2^{12}\,,\quad \frac{\bar{z}_1^6 z_3}{z_2^{12}}\,.$$

Polarkoordinatendarstellung:

$$z = re^{i\varphi} \quad \text{mit} \quad r > 0 \quad \text{und} \quad -\pi < \varphi \le \pi$$

$z_1 = 1 + i$:

$$r = |z_1| = \sqrt{2}\,, \quad \varphi = \arctan\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$$
$$\Rightarrow \quad z_1 = \sqrt{2}e^{\pi i/4}$$

$z_2 = -1 + i$:
$r = |z_2| = \sqrt{2}$,

$$\varphi = \pi + \arctan\frac{1}{-1} = \pi - \frac{\pi}{4} \qquad \Rightarrow \qquad z_2 = \sqrt{2}e^{3\pi i/4}$$

$$z_3 = i: \quad r = |z_3| = 1\,, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad z_3 = e^{\pi i/2}$$

$$\bar{z}_1^6 = \left(\sqrt{2}e^{-\pi i/4}\right)^6 = 2^3 e^{-6\pi i/4} = 2^3 e^{-3\pi i/2} = 2^3 e^{\pi i/2}$$

$$z_2^{12} = \left(\sqrt{2}e^{3\pi i/4}\right)^{12} = 2^6 e^{9\pi i} = 2^6 e^{\pi i}$$

$$\frac{\bar{z}_1^6 z_3}{z_2^{12}} = \frac{2^3 e^{\pi i/2} e^{\pi i/2}}{2^6 e^{\pi i}} = \frac{2^3 e^{\pi i/2 + \pi i/2}}{2^6 e^{\pi i}} = \frac{e^{\pi i}}{2^3 e^{\pi i}} = \frac{1}{8}\,.$$

Funktionen und ihre Eigenschaften

Eine reellwertige **Funktion** (oder **Abbildung**) f einer reellen Veränderlichen x ist eine Vorschrift,

die jedem Element $x \in D \subset \mathbb{R}$

des **Definitionsbereiches** D

genau eine reelle Zahl $f(x) \in W \subset \mathbb{R}$

aus dem **Wertebereich** W zuordnet:

$$\begin{aligned} f : D &\rightarrow W \\ x &\mapsto f(x)\,. \end{aligned}$$

Andere Bezeichnungen sind

Urbildbereich für D und

Bildbereich für W.

Funktionsgraph von f: $\quad \mathrm{graph}(f) := \{(x, y) \in D \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\}$.

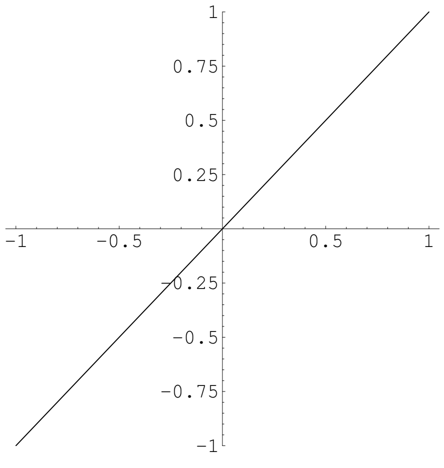


Bild 1: $f(x) = x$

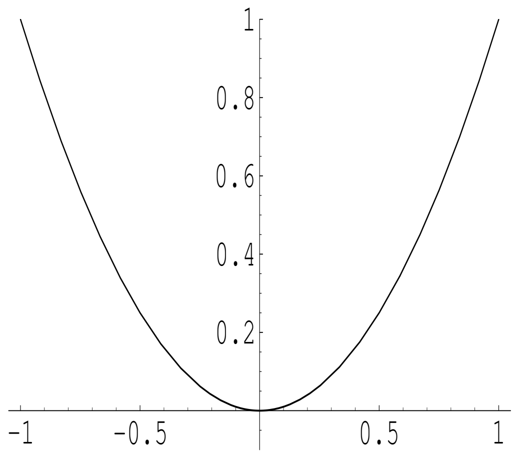


Bild 2: $f(x) = x^2$

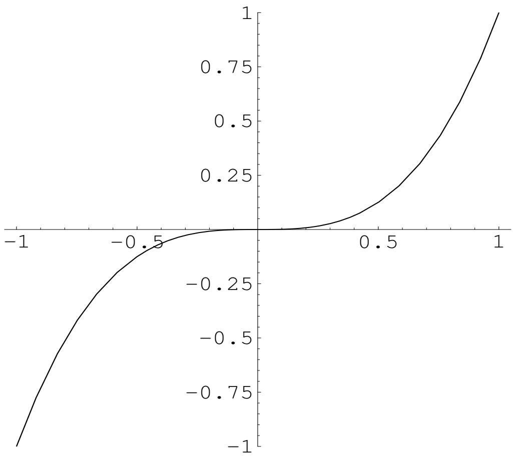


Bild 3: $f(x) = x^3$

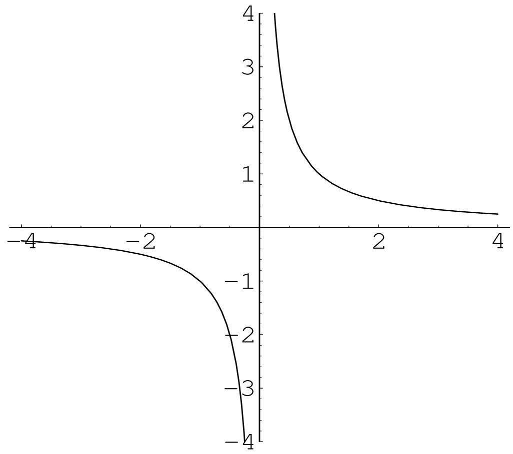


Bild 4: $f(x) = \dfrac{1}{x}$

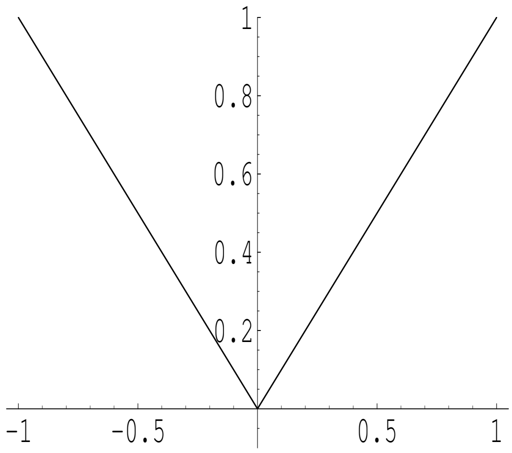


Bild 5: $f(x) = |x|$

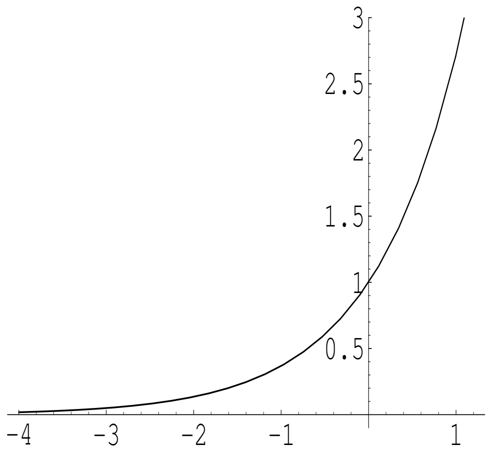


Bild 6: $f(x) = e^x$

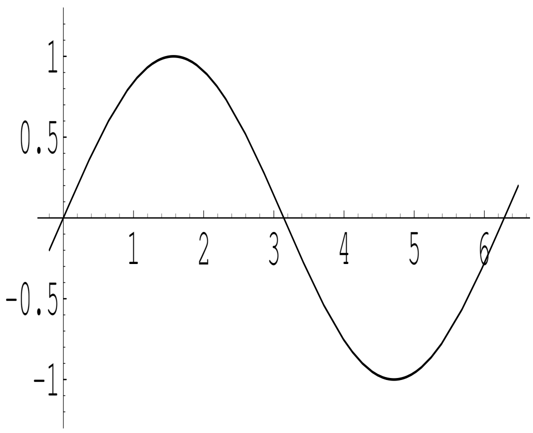


Bild 7:
$f(x) = \sin x$

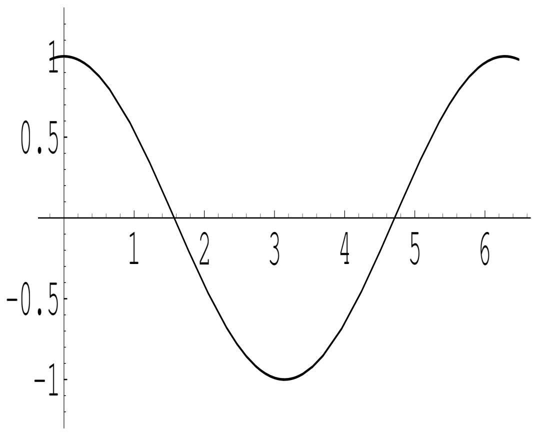


Bild 8:
$f(x) = \cos x$

Eine Funktion f heißt **surjektiv**,

wenn es für jedes $y \in W$ wenigstens ein $x \in D$ gibt,

so dass gilt $y = f(x)$.

Eine Funktion f heißt **injektiv**,

wenn es für jedes $y \in W$ höchstens ein $x \in D$ gibt,

so dass gilt $y = f(x)$.

Eine Funktion f heißt **bijektiv**,

wenn sie injektiv und surjektiv ist,

d.h. zu jedem $y \in W$ gibt es genau ein $x \in D$.

Damit ist die Funktion f dann umkehrbar, mit

Umkehrfunktion:
$$\begin{aligned} f^{-1}: W &\rightarrow D \\ y &\mapsto x = f^{-1}(y)\,. \end{aligned}$$

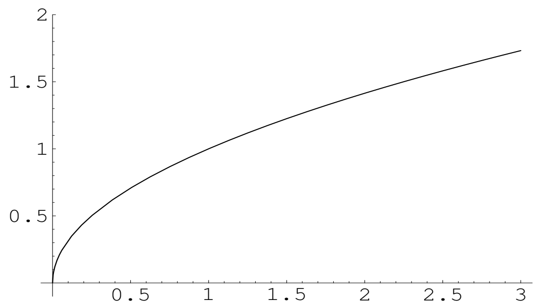


Bild 9: $g(x) = \sqrt{x}$

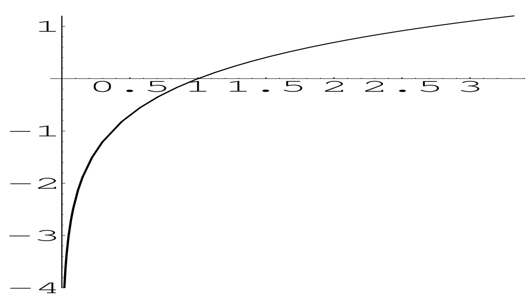


Bild 10: $g(x) = \ln x$

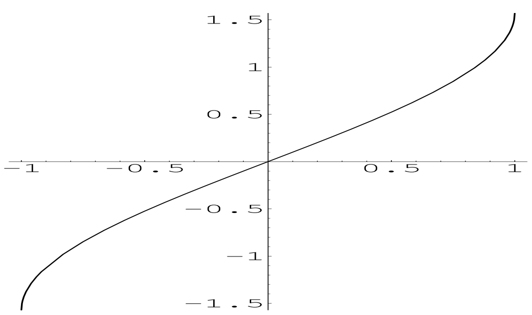


Bild 11: $g(x) = \arcsin x$

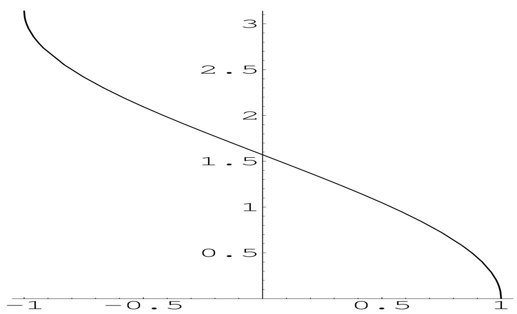


Bild 12: $g(x) = \arccos x$

Aufgabe 10:

a) Für die Funktion

$$f :]-\infty, c] \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad y = f(x) := x^2 + 8x + 15$$

bestimme man die größte Zahl c,
so dass f eine Umkehrfunktion f^{-1} besitzt.

Man berechne die Umkehrfunktion,
gebe deren Definitions- und Wertebereich an und
zeichne den Funktionsgraphen von f^{-1}.

Lösung: quadratische Ergänzung und Scheitelpunktform

$$f(x) = x^2 + 8x + 15 = (x+4)^2 - 1$$

Scheitelpunkt $\quad S = (x_s, f(x_s)) = (-4, -1).$

f invertierbar für $\quad]-\infty, c] =]-\infty, x_s] =]-\infty, -4]$

$$y = (x+4)^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad x = -4 \pm \sqrt{y+1} \leq -4 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(y) = -4 - \sqrt{y+1}.$$

Definitionsbereich $D_{f^{-1}} = [-1, \infty[$,
Wertebereich $W_{f^{-1}} =]-\infty, -4]$.

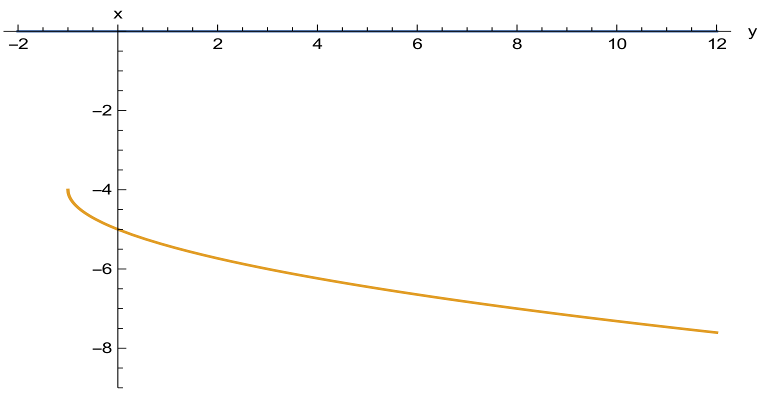


Bild 10.1 $\quad f^{-1}(y) = -4 - \sqrt{y+1}$

b) Man entscheide, welche der folgenden Funktionen injektiv, surjektiv und bijektiv sind und zeichne die zugehörigen Funktionsgraphen:

(i) $f_1 : \ [-5,5] \to [-2,2]\,, \quad f_1(x) = 1 - |2 - |x||,$

f_1 ist weder injektiv noch surjektiv

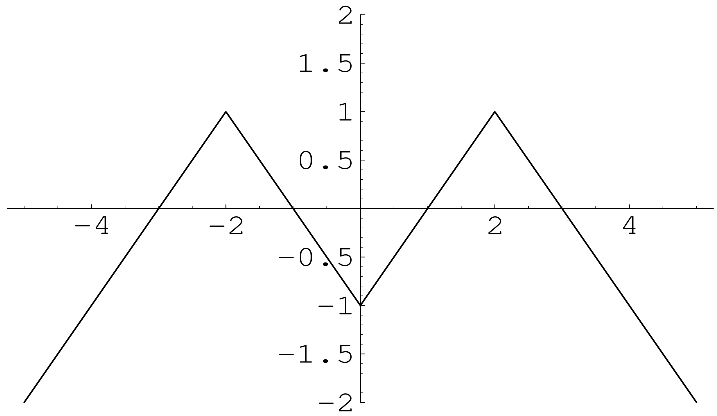


Bild 10.2 $\quad f_1(x) = 1 - |2 - |x||$

(ii) $f_2 : \ [0,1] \to [0,2]\,, \quad f_2(x) = x^4,$

f_2 ist injektiv aber nicht surjektiv

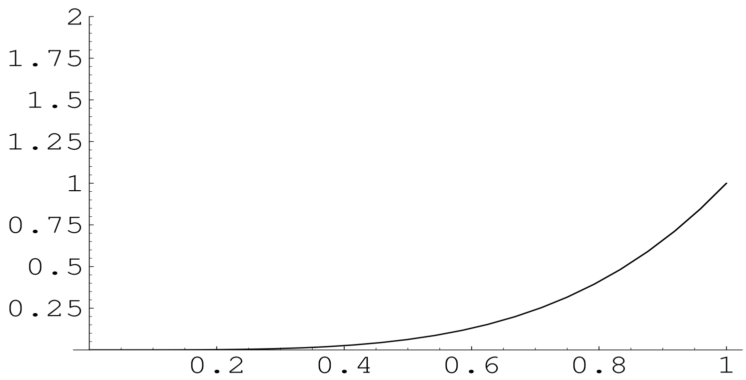


Bild 10.3 $\quad f_2(x) = x^4$

(iii) $f_3:\ [0,\pi/2] \to [0,1/2]\,, \quad f_3(x) = \sin x \cos x,$

f_3 ist surjektiv aber nicht injektiv

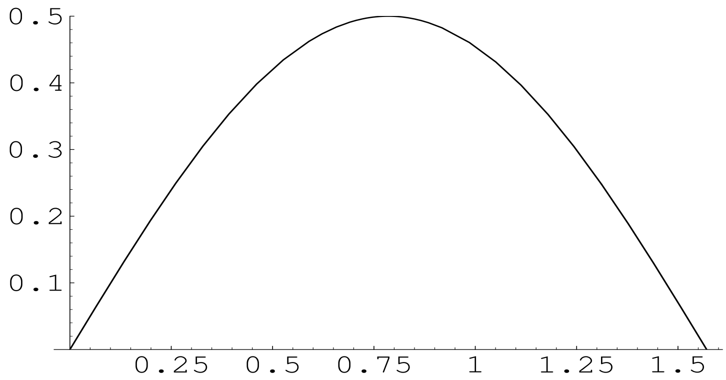


Bild 10.4 $\quad f_3(x) = \sin x \cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$

(iv) $f_4:\ \mathbb{R} \to \,]0,\infty[\,, \quad f_4(x) = e^x$

f_4 ist bijektiv

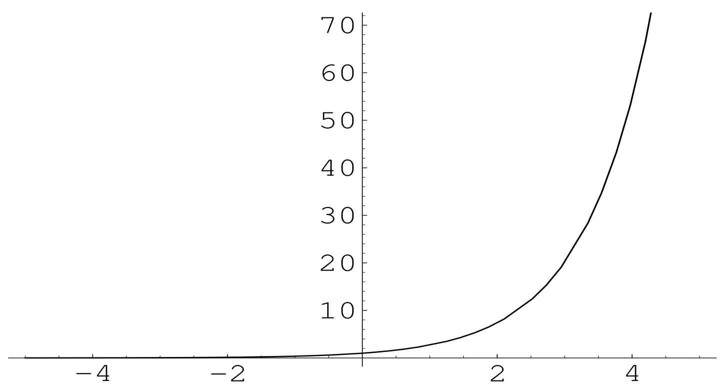


Bild 10.5 $\quad f_4(x) = e^x$

weitere Eigenschaften von Funktionen

Gegeben sei eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto y = f(x)$.

Beschränktheit von Funktionen

Gibt es eine Konstante $K \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in D$ gilt

a) $|f(x)| \leq K$, dann heißt f **beschränkt** in D,

b) $f(x) \leq K$, dann heißt f **nach oben beschränkt** in D,

c) $K \leq f(x)$, dann heißt f **nach unten beschränkt** in D.

Monotonie bei Funktionen

Gilt für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$

a) $f(x_1) < f(x_2)$,
dann heißt f **streng monoton wachsend** in D,

b) $f(x_1) \leq f(x_2)$,
dann heißt f **monoton wachsend** in D.

Bei Umkehrung der Ungleichung $(>, \geq)$

spricht man von **(streng) monoton fallend**.

Kriterium für eine Umkehrfunktionen:

Ist f im Intervall $[a, b]$ streng monoton, dann ist

$$f : [a, b] \to f([a, b])$$

bijektiv und besitzt in $[a, b]$ eine Umkehrfunktion.

Konvexität bei Funktionen

Gilt für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ und alle α mit $0 < \alpha < 1$

a) $f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$,
dann heißt f **streng konvex** in D,

b) $f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$,
dann heißt f **konvex** in D.

Bei Umkehrung der Ungleichung $(>, \geq)$

spricht man von **(streng) konkav**.

Symmetrie bei Funktionen

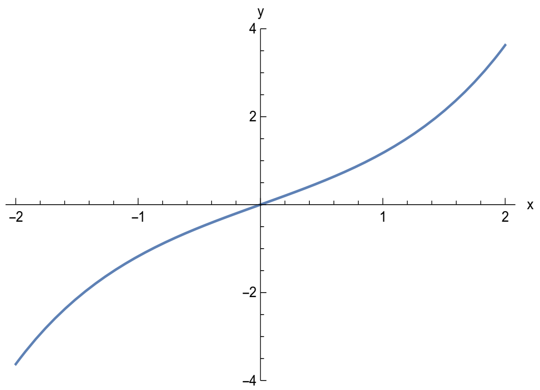
Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt folgende Symmetrien, wenn für alle $x \in D$ gilt

$f(-x) = f(x)$, dann heißt f **gerade**,

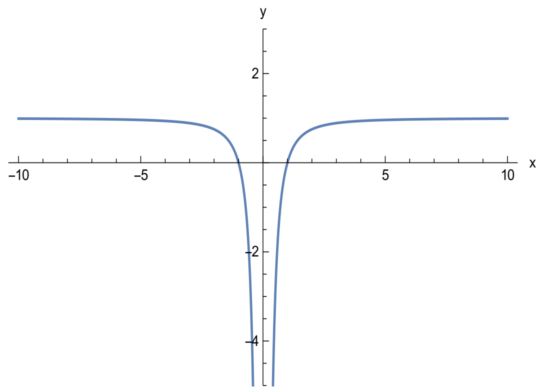
$f(-x) = -f(x)$, dann heißt f **ungerade**.

Aufgabe 11:

Zu den Abbildungsvorschriften $f(x)$ und $g(x)$ seien die folgenden Funktionsgraphen gegeben:



$f(x) = ?$



$g(x) = ?.$

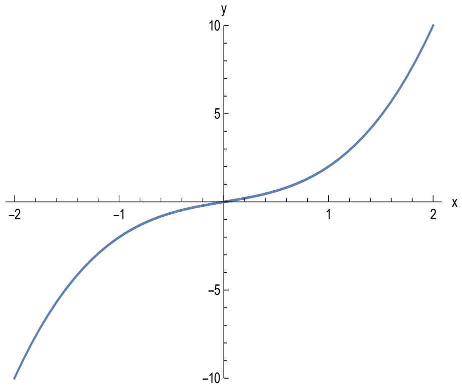
a) Man begründe, welche der Abbildungsvorschriften

$$f_1(x) = x + x^3 \quad , \qquad f_2(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

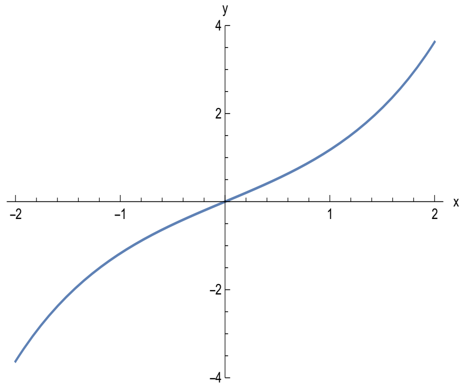
$$f_3(x) = \sinh x \quad , \qquad f_4(x) = \ln(|x|)$$

mit $f(x)$ und welche mit $g(x)$ übereinstimmt.

Aus dem Funktionsgraph von $f(x)$ folgt,
dass f ungerade ist.



$f_1(x) = x + x^3$



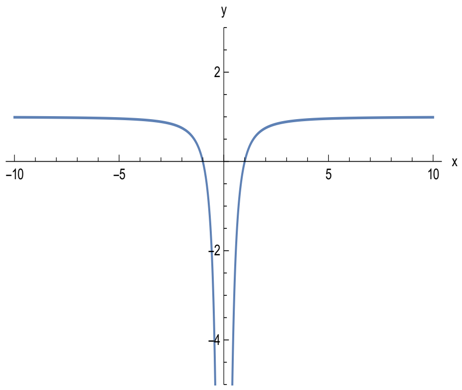
$f(x) = f_3(x) = \sinh x.$

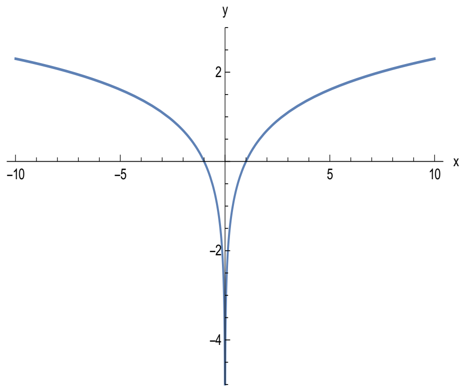
Damit kommen nur die ungeraden Funktionen
f_1 und f_3 in Frage.

Es gilt $f_1(2) = 10 > f(2)$.

Damit muss $f(x) = f_3(x) = \sinh x$ gelten.

Aus dem Funktionsgraph von $g(x)$ folgt, dass g gerade ist.





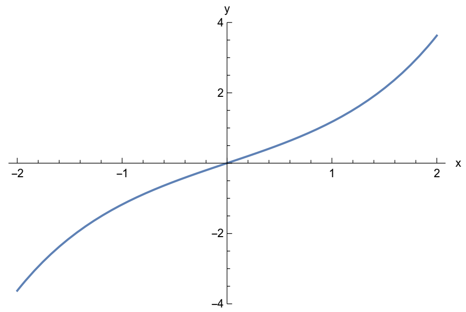
$$g(x) = f_2(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \qquad\qquad f_4(x) = \ln(|x|)$$

Damit kommen nur die geraden Funktionen
f_2 und f_4 in Frage.

Es gilt $f_4(5) > 1 > g(5)$.

Damit muss $g(x) = f_2(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$ gelten.

b) Man untersuche, ob es sich bei f und g um gerade, ungerade oder beschränkte Funktionen handelt.

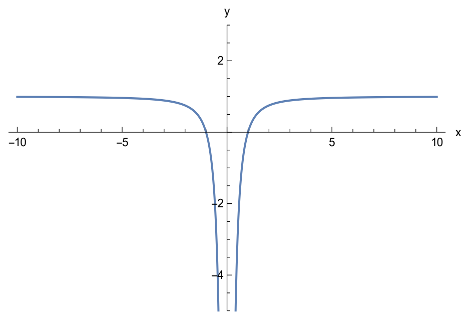


$$f(x) = \sinh x$$

f ist unbeschränkt.

f ist im Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ ungerade, denn dort gilt

$$f(-x) = \sinh(-x) = \frac{1}{2}\left(e^{-x} - e^{-(-x)}\right) = -\frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) = -f(x).$$



$$g(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

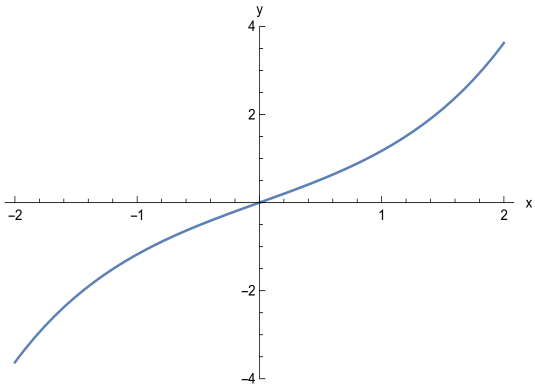
g ist im Definitionsbereich $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ nach oben beschränkt:

$$g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} < 1.$$

g ist in D gerade, denn es gilt

$$g(-x) = 1 - \frac{1}{(-x)^2} = 1 - \frac{1}{x^2} = g(x)\ .$$

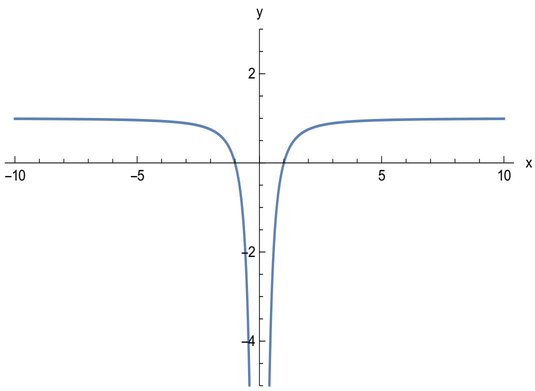
c) Anhand der Funktionsgraphen von f und g gebe man die Bereiche an, in denen die Funktion monoton wächst oder fällt und konkav oder konvex ist.



$$f(x) = \sinh x$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ wächst f streng monoton.

In $]-\infty, 0]$ ist f streng konkav und in $[0, \infty[$ streng konvex.



$$g(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

Im Intervall $]-\infty, 0[$ fällt g streng monoton und ist streng konkav.

Im Intervall $]0, \infty[$ wächst g streng monoton und ist streng konkav.

Exponentialfunktion und natürlicher Logarithmus

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \quad , \quad x \mapsto y = \exp(x) = e^x$$

$$\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \quad , \quad y \mapsto x = \ln(y)$$

Der natürliche Logarithmus ist die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion:

$$y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln y \,, \quad y = e^{\ln y} \,, \quad x = \ln(e^x) \,,$$

$$\ln(1) = 0 \,, \quad \ln(e) = 1 \,.$$

Rechenregeln für den natürlichen Logarithmus

Aus der Funktionalgleichung

$$e^x e^y = e^{x+y}$$

der Exponentialfunktion und

$$(e^x)^a = e^{ax}$$

mit $a \in \mathbb{R}$ ergibt sich:

$$\ln(x) + \ln(y) = \ln(x \cdot y), \quad \ln(x) - \ln(y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right), \quad \ln(x^a) = a\ln(x).$$

gebrochen rationale Funktionen

Eine Funktion, die sich als Bruch zweier Polynome schreiben lässt

$$f(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0},$$

heißt **gebrochen rationale Funktion**.

Gilt Zählergrad n größer oder gleich Nennergrad m,

so kann von f durch **Polynomdivision**

ein Polynom $\tilde{p}$ vom Grad $n - m$ abgespalten werden.

Für den Grad des Rest-Zählerpolynoms r_k gilt $k < m$

$$f(x) = \tilde{p}(x) + \frac{r_k(x)}{q_m(x)}\ .$$

Aufgabe 12:

a) Man vereinfache die folgende Abbildungsvorschrift

$$f(x) = \ln \frac{x^2+4x+4}{x} - \ln(x+2) + \ln(x)\ .$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln \frac{x^2+4x+4}{x} - \ln(x+2) + \ln(x) \\ &= \ln(x^2+4x+4) - \ln(x) - \ln(x+2) + \ln(x) \\ &= \ln(x+2)^2 - \ln(x+2) \\ &= 2\ln(x+2) - \ln(x+2) = \ln(x+2)\ . \end{aligned}$$

b) Für die unecht gebrochen rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 3x - 31}{x^2 + 6x + 11}\,.$$

spalte man den polynomialen Anteil
durch Polynomdivision ab.

$$
\begin{array}{llll}
\multicolumn{4}{l}{(x^3 + 3x^2 - 3x - 31) : (x^2 + 6x + 11) = x - 3 + \dfrac{4x + 2}{x^2 + 6x + 11}} \\
-(x^3 & +6x^2 & +11x) & \\
\hline
 & -3x^2 & -14x & -31 \\
 & -(-3x^2 & -18x & -33) \\
\hline
 & & 4x & +2
\end{array}
$$

c) Mit Hilfe der Eulerschen Formel und unter Verwendung von $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ bestätige man die Gültigkeit der Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \cos 3x &= 4\cos^3 x - 3\cos x\ , \\ \sin 3x &= 3\sin x - 4\sin^3 x\ . \end{aligned}$$

Mit der Eulerschen Formel $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ erhält man

$$\begin{aligned} \cos 3x + i\sin 3x &= e^{i3x} = \left(e^{ix}\right)^3 = (\cos x + i\sin x)^3 \\ &= \cos^3 x + 3i\cos^2 x\sin x - 3\cos x\sin^2 x - i\sin^3 x \\ &= \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x + i(3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x)\ . \end{aligned}$$

Mit einem Koeffizientenvergleich und $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x \\ &= \cos^3 x - 3\cos x(1 - \cos^2 x) \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x\ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 3x &= 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x \\ &= 3(1 - \sin^2 x)\sin x - \sin^3 x \\ &= 3\sin x - 4\sin^3 x\ . \end{aligned}$$