Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2020/21**
Dr. K. Rothe ©

Analysis I

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 2

Aussagen

Aussagen sind sprachliche Objekte, die einen Sachverhalt ausdrücken, dessen **Wahrheitswert** entweder wahr (=1,=W) oder falsch (=0,=F) ist.

Verknüpfungen von Aussagen durch

Junktoren (Funktoren) $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$:

$$
\begin{array}{rcl}
A, B & : & \text{Aussagen} \\[2ex]
\neg A, \bar{A} & : & \text{Negation, d.h. nicht } A \\[2ex]
A \wedge B & : & \text{Konjunktion, d.h. } A \text{ und } B \\
A \vee B & : & \text{Disjunktion, d.h. } A \text{ oder } B \\[2ex]
A \Rightarrow B & : & \text{Implikation, d.h. aus } A \text{ folgt } B \\
A \Leftrightarrow B & : & \text{Äquivalenz, d.h. } A \text{ äquivalent } B
\end{array}
$$

Wahrheitswertetafel zu den angegebenen Verknüpfungen:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Tautologie: Aussage, deren Wahrheitswert immer richtig ist

Aussageformen und Quantoren

Eine **Aussageform** ist eine Aussage,

die von einer oder mehreren Variablen abhängt:

z.B. $\quad A(x) \quad :\Leftrightarrow \quad x^2 - 1 < 0$

Die **Quantoren** $\forall$ und $\exists$:

$\forall x : A(x)$ bedeutet: für alle x gilt $A(x)$.

$\exists x : A(x)$ bedeutet: es gibt (mindestens) ein x, so dass $A(x)$ gilt.

Beweise

Ein **mathematischer Satz** liegt im Allgemeinen in folgender Form vor:

$$A \Rightarrow B\,.$$

A heißt **Voraussetzung** (Prämisse) und

B **Behauptung** (Konklusion).

Die Implikation ist dabei in der Regel nicht

unmittelbar offensichtlich oder sofort und elementar einsehbar.

Kettenschluss: $A_0 \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow A_n$

Ist A_0 richtig, so folgt dass auch A_n richtig ist.

direkter Beweis eines mathematischen Satzes:

Nachweis der Gültigkeit von $A \Rightarrow B$ durch einen Kettenschluss der Form

$$A =: A_0 \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_n := B$$

Dabei muss jede Implikation $A_i \Rightarrow A_{i+1}$

sofort und elementar einsehbar sein.

indirekter Beweis eines mathematischen Satzes:

a) durch Kontraposition, es gilt nämlich
$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
Nachweis der Gültigkeit von $\neg B \Rightarrow \neg A$
durch einen Kettenschluss der Form

$$\neg B \;=:\; A_0 \;\Rightarrow\; A_1 \;\Rightarrow\; A_2 \;\Rightarrow\; \ldots \;\Rightarrow\; A_n \;:=\; \neg A$$

b) durch Widerspruch, es gilt nämlich
$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$
Nachweis der Ungültigkeit von $A \wedge \neg B$
durch einen Kettenschluss der Form

$$(A \wedge \neg B) =: A_0 \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_n \quad \text{(falsche Aussage)}$$

Aufgabe 5:

a) Man zeige, dass folgende Aussage eine Tautologie ist

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)\,.$$

A	B	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

b) Man beweise:

Für reelle Zahlen a, b mit $0 < a < b$ gilt die Ungleichung

$$\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a}.$$

(i) indirekter Beweis:

Voraussetzung Aussage A:

Gegeben seien $a, b > 0$ mit $a < b$.

Behauptung Aussage B:

$\forall\, a, b$, mit A, gilt $\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a}$.

$$\neg B : \ \exists\, a, b \,\text{mit A} \ : \ \sqrt{b} - \sqrt{a} \geq \sqrt{b-a}$$

$$\Rightarrow \quad \exists\, a, b \,\text{mit A} \ : \ b + a - 2\sqrt{ab} \geq b - a$$

$$\Rightarrow \quad \exists\, a, b \,\text{mit A} \ : \ a \geq \sqrt{ab}$$

$$\Rightarrow \quad \exists\, a, b \,\text{mit A} \ : \ a^2 \geq ab$$

$$\Rightarrow \quad \exists\, a, b \,\text{mit A} \ : \ a \geq b \ : \neg\, \text{A}$$

(ii) direkter Beweis:

Voraussetzung Aussage A:

Gegeben seien $a, b > 0$ mit $a < b$.

Behauptung Aussage B:

$\forall\, a, b$, mit A, gilt $\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a}$.
direkter Beweis:

$$A:\ 0 < a < b$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{a} < \sqrt{b}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{a}\sqrt{a} < \sqrt{a}\sqrt{b}$$

$$\Rightarrow \quad 2a < 2\sqrt{ab}$$

$$\Rightarrow \quad b + a - 2\sqrt{ab} < b - a$$

$$\Rightarrow \quad (\underbrace{\sqrt{b} - \sqrt{a}}_{>0})^2 < \underbrace{b - a}_{>0}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a} \quad : B.$$

Mengen

Definition:

Nach **Cantor** ist eine **Menge** eine Zusammenfassung wohlunterschiedener Objekte der Anschauung oder des Denkens zu einem Ganzen.

Darstellung einer Menge durch:

a) Aufzählung der Elemente:

$$A := \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

b) Element, Grundmenge und charakterisierende Eigenschaft:

$$B := \{x \in A \mid x^2 = 1\}$$

Bezeichnungen:

A, B	:	Mengen
$\{\}, \emptyset$	:	leere Menge
$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$	:	natürliche, ganze, rationale, reelle und komplexe Zahlen

Verknüpfungen:

$a \in A$: a ist Element von A

$a \notin A$: a ist kein Element von A

$A = B$: A und B besitzen dieselben Elemente

$A \subseteq B$: A ist Teilmenge von B

$A \subset B$: A ist echte Teilmenge von B

$A \setminus B$: A ohne B (Differenzmenge)

$A \cup B$: A vereinigt B (Vereinigungsmenge)

$A \cap B$: A geschnitten B (Schnittmenge)

$A \times B$: **kartesisches Produkt** von A und B

euklidische Ebene:

$$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$$

dreidimensionaler euklidischer Raum:

$$\mathbb{R}^3 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge z \in \mathbb{R}\}$$

Aufgabe 6:

Man stelle die folgenden Mengen

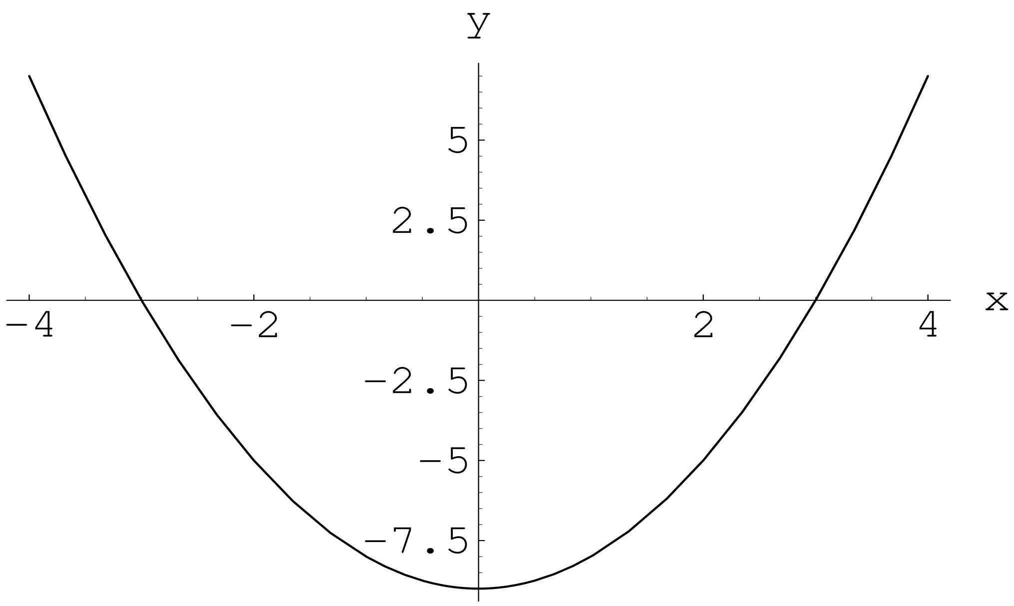
durch Aufzählung ihrer Elemente dar

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 9 < 0\}$,

$$x^2 - 9 = (x+3)(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \text{Nullstellen } x_1 = -3, x_2 = 3$$

$$\Rightarrow \quad A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$



$$f(x) = x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$$

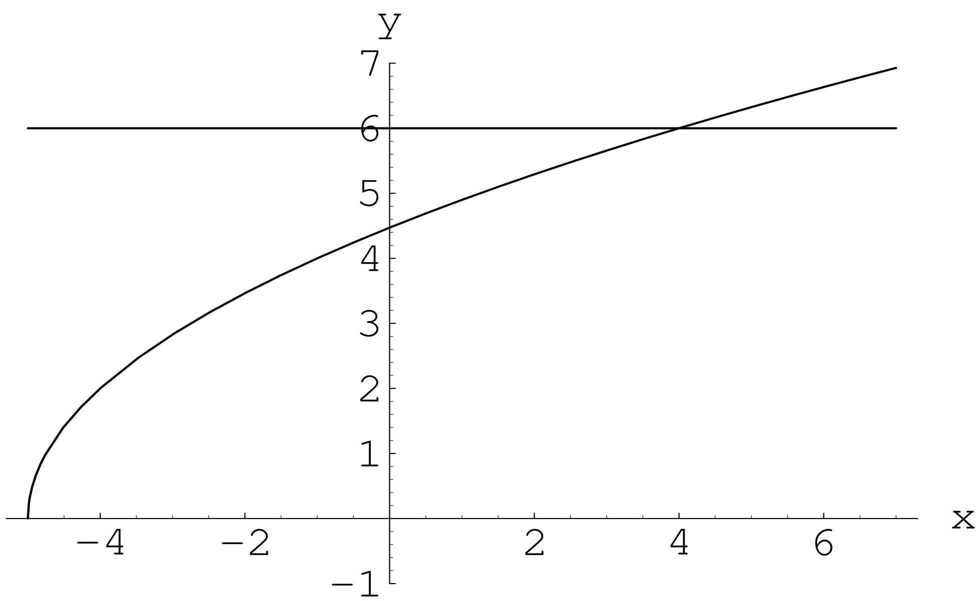
b) $B = \left\{ x \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \sqrt{4x+20} \le 6 \right\}$,

$$4x + 20 \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \ge -5 \quad \text{und}$$

$$\sqrt{4x+20} \le 6 \quad \Rightarrow \quad 4x + 20 \le 36$$

$$\Rightarrow \quad x \le 4 \quad \Rightarrow$$

$$B = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$



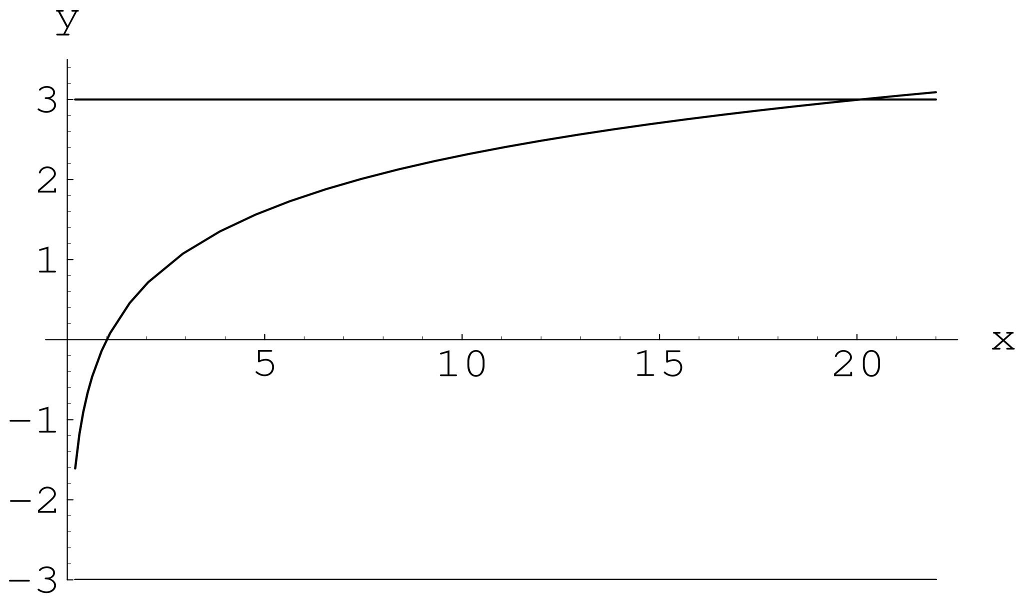
$f(x) = \sqrt{4x+20}$

c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid -3 \leq \ln x < 3\}\,,$

Da der ln streng monoton wächst, erhält man

$\ln 20 \approx 2.9958 < 3 < \ln 21 \approx 3.045 \quad \Rightarrow$

$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots 19, 20\}.$



$f(x) = \ln x$

d) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\},$
$B = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\},$
$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots 19, 20\}.$

Man bilde die Mengen

$A \cup B = B\,,$

$A \cap C \;=\; \{1, 2\}\,,$

$C \setminus B = \{5, 6, \cdots 19, 20\}\,,$

$(C \setminus B) \cap A = \emptyset$

Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ können

durch folgende Axiome charakterisiert werden.

Axiome von Peano:

a) 1 ist eine natürliche Zahl, d.h. $1 \in \mathbb{N}$.

b) Jede natürliche Zahl n hat genau einen Nachfolger n' mit
$$n' = n + 1.$$

c) 1 ist kein Nachfolger einer natürliche Zahl, d.h.
$$n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad n + 1 \neq 1.$$

d) Die Nachfolger zweier verschiedener natürlicher Zahlen n und m sind voneinander verschieden, d.h.
$$n \neq m \quad \Rightarrow \quad n + 1 \neq m + 1.$$

e) Es gilt das Induktionsprinzip:

Für eine Menge A mit $A \subseteq \mathbb{N}$ gelte

(i) $1 \in A$

(ii) $n \in A \quad \Rightarrow \quad n + 1 \in A.$

Dann folgt $A = \mathbb{N}$.

Beweisprinzip der vollständigen Induktion:

Für die Aussageform $A(n)$ soll Folgendes bewiesen werden:

Behauptung:

Die Aussage $A(n)$ gelte für alle $n \geq n_0$ mit $n, n_0 \in \mathbb{N}$.

Diese Aussage kann über **vollständige Induktion**

bewiesen werden, d.h. kann man die Gültigkeit der folgenden

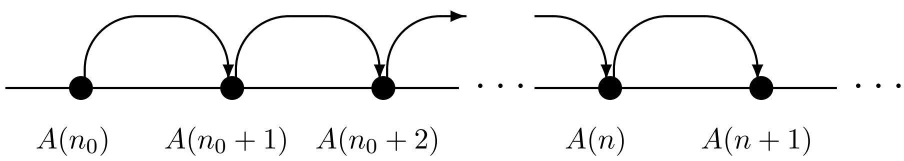
Aussagen a) und b) nachweisen, dann gilt die Behauptung.

a) **Induktionsanfang:** Man zeigt, dass $A(n_0)$ gilt.

b) **Induktionsschritt oder -schluss:**
Man setzt für ein beliebiges $n \geq n_0$

die Gültigkeit von $A(n)$ voraus (**Induktionsannahme**)

und leitet daraus die Gültigkeit von $A(n+1)$ her.



Aufgabe 7:

Man beweise durch vollständige Induktion

a) Für $q \neq 1$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt : $$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\,.$$

Beweis über vollständige Induktion:

$$n = 0: \quad \sum_{k=0}^{0} q^k \;=\; q^0 = 1 \quad = \frac{1-q}{1-q}\,,$$

$$n \to n+1: \quad \sum_{k=0}^{n+1} q^k \;=\; \left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right) + q^{n+1}$$

$$= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1}$$

$$= \frac{1-q^{n+1} + (1-q)q^{n+1}}{1-q}$$

$$= \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt : $\quad \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2n-1}{2n} \geq \dfrac{1}{n+1}$.

Beweis über vollständige Induktion:

$$n = 1 : \qquad \frac{2 \cdot 1 - 1}{2} = \frac{1}{2} \geq \frac{1}{1+1}$$

$$n \to n+1 : \qquad \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)}$$

$$\geq \frac{n+2}{n+2} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{2n+1}{2n+2}$$

$$= \frac{1}{n+2} \cdot \frac{(n+2)(2n+1)}{(n+1)(2n+2)}$$

$$= \frac{1}{n+2} \cdot \frac{2n^2+5n+2}{2n^2+4n+2}$$

$$> \frac{1}{n+2}$$

c) $a_n := 11^{n+1} + 12^{2n-1}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 133 teilbar.

Mit $a_n := 11^{n+1} + 12^{2n-1}$ gilt $11^{n+1} = a_n - 12^{2n-1}$.

Beweis über vollständige Induktion:

$$n = 1: \quad a_1 = 11^2 + 12 = 133 \quad \text{ist durch 133 teilbar,}$$

$$\begin{aligned}
n \to n+1: \ a_{n+1} &= 11^{n+2} + 12^{2n+1} = 11 \cdot 11^{n+1} + 12^{2n+1} \\
&= 11(a_n - 12^{2n-1}) + 12^2 \cdot 12^{2n-1} \\
&= 11a_n + 12^{2n-1}(12^2 - 11) \\
&= 11a_n + 133 \cdot 12^{2n-1}
\end{aligned}$$

ist durch 133 teilbar.

Fakultäten und Binomialkoeffizienten

n-Fakultät:

$$n! \;:=\; \begin{cases} 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-2)\cdot(n-1)\cdot n & ,\; n\geq 1 \\ 1 & ,\; n=0 \end{cases}$$

Binomialkoeffizienten: $(0\leq m\leq n)$

$$\binom{n}{m} \;:=\; \frac{n!}{m!(n-m)!} \;=\; \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$$

Eine natürliche Zahl $m\in\mathbb{N}$

wird als **Teiler** von $n\in\mathbb{N}$ bezeichnet,

falls es ein $k\in\mathbb{N}$ gibt, so dass $n=m\cdot k$ gilt.

Menge der **Primzahlen**

$$\mathbb{P} := \{p\in\mathbb{N}\mid p>1\;,\; p \text{ besitzt nur die Teiler 1 und } p\}$$

Satz: Primfaktorzerlegung

Jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ lässt sich als Produkt
endlich vieler Primzahlpotenzen $p_j^{r_j}$ schreiben:

$$n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k} \ .$$

Diese Darstellung ist für $n > 1$ bis auf die Reihenfolge
der Faktoren eindeutig bestimmt.

größter gemeinsamer Teiler:

Als ggT (n, m) bezeichnet man die größte Zahl der Menge

$$\{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ teilt } n \text{ und } m\}.$$

kleinstes gemeinsame Vielfaches:

Als kgV (n, m) bezeichnet man die kleinste Zahl der Menge

$$\{k \in \mathbb{N} \mid n \text{ und } m \text{ teilen } k\} \ .$$

Es gilt dann die Beziehung

$$n \cdot m = \text{ggT}(n, m) \cdot \text{kgV}(n, m) \ .$$

Aufgabe 8:

a) Für die Binomialkoeffizienten mit $n, m \in \mathbb{N}$

und $m \leq n$ weise man folgende Beziehungen nach:

$$\binom{n}{m} \cdot \frac{n+1}{m+1} = \binom{n+1}{m+1} .$$

$$\begin{aligned}
\binom{n}{m} \cdot \frac{n+1}{m+1} &= \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{n+1}{m+1} \\
&= \frac{n!(n+1)}{m!(m+1) \cdot (n+1-m-1)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(m+1)!(n+1-(m+1))!} \\
&= \binom{n+1}{m+1}
\end{aligned}$$

b) Man bestimme für die Zahlen 96135 und 84854
die Primfaktorzerlegung, den ggT und das kgV.

Primfaktorzerlegungen

$$96135 = 3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 29,$$
$$84854 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 29$$

$$\mathrm{ggT}(96135, 84854) = 29\ ,$$

$$\mathrm{kgV}(96135, 84854) = 2{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}7{\cdot}11{\cdot}13{\cdot}17{\cdot}19{\cdot}29 = 281291010$$

c) Man wandle die rationale Zahl r
mit der periodischen Zifferndarstelllung
$r = 4.\overline{321}$ um in einen Bruch.

$$1000 \cdot r = 1000 \cdot 4.321\overline{321} = 4321.\overline{321}$$

$$\Rightarrow \quad 1000r - r = 4321.\overline{321} - 4.\overline{321} = 4317$$

$$999r = 4317 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{4317}{999} = \frac{1439}{333}$$

d) Man beweise indirekt, dass $\sqrt{14}$ irrational ist.

Behauptung: $B\colon \sqrt{14}$ ist irrational.

$\neg B$: $\sqrt{14}$ ist rational

$\Rightarrow$ $\exists\, m, n \in \mathbb{N}$ teilerfremd mit $\sqrt{14} = \dfrac{m}{n}$

(man beachte: $\sqrt{14} > 0$)

$\Rightarrow$ $2 \cdot 7 = 14 = \dfrac{m^2}{n^2}$ (auf beiden Seiten quadriert)

$\Rightarrow$ $2 \cdot 7 \cdot n^2 = m^2$

$\Rightarrow$ m^2 ist gerade und damit auch m, also $m = 2k$

$\Rightarrow$ $2 \cdot 7 \cdot n^2 = m^2 = (2k)^2 \Rightarrow 7 \cdot n^2 = 2k^2$

$\Rightarrow$ n^2 ist gerade und damit auch n

Widerspruch zur Teilerfremdheit von n, m

$\Rightarrow$ $\neg B$ ist falsch

$\Rightarrow$ B ist richtig