Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Prof. Dr. Armin Iske
Fachbereich Mathematik, Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg
Wintersemester 2018/2019

Informationsquellen.

- **Internet**

  www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a1/1819/

- **Vorlesung**

  Dienstag, 13:15–14:45, Audimax 1, ab 23.10.2018

  Donnerstag, 11:30–13:00, Audimax 2, ab 25.10.2018

- **Übungen in Tutorgruppen**

  Dr. Kai Rothe und Übungsgruppenleiter(innen)

- **Hörsaalübungen**

  Dr. Kai Rothe.

- **Sprechstunde Prof. Iske**

  Dienstag, SBS 95-E 3.079, 15:00–16:00.

Literaturquellen.

PRIMÄR:

- R. Ansorge, H. J. Oberle: Mathematik für Ingenieure 1, 3. Auflage. WILEY-VCH, Berlin, 2000.
- H. J. Oberle, K. Rothe, Th. Sonar: Mathematik für Ingenieure, Band 3: Aufgaben und Lösungen. WILEY-VCH, Berlin, 2000.

SEKUNDÄR:

- K. Meyberg, P. Vachenauer: Höhere Mathematik, Bände 1 und 2. Springer, Berlin.
- K. Burg, H. Haf, F. Wille: Höhere Mathematik für Ingenieure, Band 1: Analysis. B.G. Teubner, Stuttgart, 1992.

Inhalte Analysis I.

- Aussagen, Logik und Mengen.
- Zahlensysteme, Relationen und Funktionen.
- Folgen, Reihen und Konvergenz.
- Vektorräume und Normen.
- Stetige und gleichmäßig stetige Funktionen.
- Differenzierbarkeit und Differentiationsregeln.
- Mittelwertsätze, lokale Extrema, Satz von Taylor.
- Regel von de l'Hospital, Kurvendiskussion.
- Fehlerrechnung, Iterationsmethoden und Banachscher Fixpunktsatz.

1 Aussagen, Mengen, Funktionen

1.1 Aussagen

Definition: *Eine Aussage ist eine sprachliche Konstruktion, von der man eindeutig entscheiden kann, ob sie WAHR oder FALSCH ist.*

Beispiele für Aussagen und keine Aussagen:

- Heute ist Donnerstag.
- Jede Primzahl ist ungerade.
- 2 ist eine Primzahl.
- Studieren macht Spaß ... ganz besonders an der TUHH.
- Die TUHH ist Deutschlands jüngste Technische Universität.
- Die 43 ist eine schöne Zahl.

Charakteristische Eigenschaft: Aussagen sind entweder WAHR oder FALSCH.

Wahrheitswerte von Aussagen. Sei A eine Aussage. Dann kann man A einen eindeutigen *Wahrheitswert* $w(A)$ zuordnen.

$$
\begin{aligned}
w(A) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad A \text{ ist falsch;} \\
w(A) = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad A \text{ ist wahr.}
\end{aligned}
$$

Verknüpfungen von Aussagen. Seien A und B Aussagen.

$\neg A$	:	Negation	“nicht A”
$A \wedge B$	:	Konjunktion	“A und B”
$A \vee B$	:	Disjunktion	“A oder B”
$A \Rightarrow B$	:	Implikation	“aus A folgt B”
$A \Leftrightarrow B$	:	Äquivalenz	“A ist äquivalent zu B”

Wahrheitswertetafeln.

$w(A)$	$w(B)$	$w(\neg A)$	$w(A \wedge B)$	$w(A \vee B)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(A \Leftrightarrow B)$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Bemerkung: Eine Implikation ist wahr, wenn die *Prämisse* falsch ist. Es gilt

$$A \Rightarrow B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \neg A \vee B$$

Definition:

• Eine Verknüpfung von Aussagen, die für sämtliche Kombinationen von Wahrheitswerten stets eine WAHRE Aussage ergeben, heißt `Tautologie`.

• Eine Verknüpfung von Aussagen, die für sämtliche Kombinationen von Wahrheitswerten stets eine FALSCHE Aussage ergeben, heißt `Kontradiktion`.

Beispiel für eine Tautologie.

$$(A \Rightarrow B) \quad \Longleftrightarrow \quad (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Betrachte zum Nachweis die folgende Wahrheitswertetafel.

$w(A)$	$w(B)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(\neg B)$	$w(\neg A)$	$w(\neg B \Rightarrow \neg A)$
1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

$w(A)$	$w(B)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(\neg B \Rightarrow \neg A)$	$(A \Rightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Beispiel für eine Tautologie.

$$\Big((A \Rightarrow B) \wedge \neg B\Big) \quad \Longrightarrow \quad \neg A$$

Betrachte zum Nachweis die folgende Wahrheitswertetafel.

$w(A)$	$w(B)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(\neg B)$	$w((A \Rightarrow B) \wedge \neg B)$
1	1	1	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

$w(A)$	$w(B)$	$w((A \Rightarrow B) \wedge \neg B)$	$w(\neg A)$	$w(((A \Rightarrow B) \wedge \neg B) \Rightarrow \neg A)$
1	1	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	0	1	1
0	0	1	1	1

Häufig verwendete Tautologien.

(**1**)	$A \vee \neg A$	*tertium non datur*
(**2**)	$\neg(A \wedge \neg A)$	*Widerspruch*
(**3**)	$\neg\neg A \iff A$	*doppelte Verneinung*
(**4**)	$\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B$	*de Morgan*
(**5**)	$\neg(A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B$	*de Morgan*
(**6**)	$(A \Rightarrow B) \iff (\neg B \Rightarrow \neg A)$	*Kontraposition*
(**7**)	$(A \Rightarrow B) \wedge A \implies B$	*modus ponens*
(**8**)	$(A \Rightarrow B) \wedge \neg B \implies \neg A$	*modus tollens*
(**9**)	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \implies (A \Rightarrow C)$	*modus barbara*
(**10**)	$A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	*Distributivgesetz*
(**11**)	$A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	*Distributivgesetz*

Aussageformen.

Definition: Eine Aussage, die von Variablen abhängt, heißt `Aussageform`.

Beispiele für Aussageformen.

- x ist eine gerade Zahl;
- x ist größer als y;
- x ist größer als y, und y ist größer als z.

Beachte: Wahrheitswerte von Aussageformen erhält man nur durch Einsetzen von Werten für die einzelnen Variablen.

Beispiel: Definiere Aussageform $A(x, y)$ durch

$$A(x, y) \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 < 2$$

Dann gilt:

- $A(1/2, 1)$ ist wahr, d.h. $w(A(1/2, 1)) = 1$;
- $A(-3, 2)$ ist falsch, d.h. $w(A(-3, 2)) = 0$.

Quantoren.

Mathematische Aussagen werden häufig durch Kombination von Aussageformen mit *Quantoren* formuliert.

Es gibt zwei Grundquantoren:

- $\forall$ Allquantor;
- $\exists$ Existenzquantor;

und weiterhin

- $\exists_1$ Existenz mit Eindeutigkeit.

Sei $A(x)$ eine Aussageform. Dann definieren wir neue Aussagen wie folgt.

- $\forall x : A(x)$, d.h. für alle x gilt $A(x)$;
- $\exists x : A(x)$, d.h. es gibt *mindestens* ein x, für das $A(x)$ gilt;
- $\exists_1 x : A(x)$, d.h. es gibt *genau* ein x, für das $A(x)$ gilt.

Quantoren.

Die Wahrheitswerte der einzelnen Aussagen werden entsprechend definiert:

$$w(\forall\, x : A(x)) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{für alle } x \text{ ist } w(A(x)) = 1$$

$$w(\exists\, x : A(x)) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{es gibt \textit{mindestens} ein } x, \text{ so dass } w(A(x)) = 1$$

$$w(\exists_1\, x : A(x)) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{es gibt \textit{genau} ein } x, \text{ so dass } w(A(x)) = 1$$

Negation von Quantoren.

Es gilt

$$\neg\Big(\forall\, x : A(x)\Big) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, x : \Big(\neg A(x)\Big)$$

$$\neg\Big(\exists\, x : A(x)\Big) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, x : \Big(\neg A(x)\Big)$$

Mathematische Sätze und Beweistechniken.

Standardform eines Satzes:

$$A \quad\Longrightarrow\quad B, \qquad \text{für Aussagen } A, B,$$

wobei A Voraussetzung (Prämisse) und B Behauptung (Konklusion) heißt.

Mögliche Beweistechniken:

- **Direkter Beweis** (Kettenschluss)

$$A = A_0 \Longrightarrow A_1 \Longrightarrow A_2 \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow A_n = B$$

- **Indirekter Beweis** (Kontraposition, Widerspruch)

$$A \Longrightarrow B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \neg B \Longrightarrow \neg A$$

  ist eine Tautologie.

Exemplarisches Beispiel für einen ersten Beweis.

Satz: *Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist genau dann gerade, wenn ihr Quadrat n^2 gerade ist, d.h. für $n \in \mathbb{N}$ gilt die Äquivalenz*

$$n \text{ gerade} \qquad \Longleftrightarrow \qquad n^2 \text{ gerade.}$$

Beweis: Führe den Beweis in zwei Schritten:

1. Schritt: Zeige die Implikation

$$n \text{ gerade} \qquad \Longrightarrow \qquad n^2 \text{ gerade.}$$

2. Schritt: Zeige die Implikation

$$n^2 \text{ gerade} \qquad \Longrightarrow \qquad n \text{ gerade.}$$

1. Schritt: Direkter Beweis.

Sei n gerade. Dann $\exists k \in \mathbb{N} : n = 2k$

$$n = 2k \quad \Longrightarrow \quad n^2 = 4k^2 = 2(2k^2) \quad \Longrightarrow \quad n^2 \text{ gerade.}$$

2. Schritt: Indirekter Beweis. $\quad$ (zeige $\neg B \Rightarrow \neg A$ statt $A \Rightarrow B$)

Sei n^2 gerade. Angenommen n ist ungerade. Dann $\exists k \in \mathbb{N} : n = 2k - 1$.

$$\begin{aligned} n = 2k - 1 \quad &\Longrightarrow \quad n^2 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2(2k^2 - 2k) + 1 \\ &\Longrightarrow \quad n^2 \text{ ungerade.} \end{aligned}$$

Dies ist aber ein *Widerspruch* zur Annahme (n^2 gerade). ■

Ein weiteres exemplarisches Beweisbeispiel.

Satz: *Die Zahl* $\sqrt{2}$ *ist irrational, d.h.* $\sqrt{2}$ *läßt sich nicht als Bruch* $\sqrt{2} = n/m$ *mit natürlichen Zahlen* $n, m \in \mathbb{N}$ *darstellen.*

Beweis (durch Widerspruch) **:** Annahme: $\exists n, m \in \mathbb{N} : \sqrt{2} = \frac{n}{m}$.

Wir dürfen ohne Einschränkung annehmen, dass n und m teilerfremd sind. Denn ansonsten teilen wir m, n durch deren größten gemeinsamen Teiler (ggT).

Dann gilt:

$$2m^2 = n^2 \quad \Longrightarrow \quad n^2 \text{ gerade} \quad \Longrightarrow \quad n \text{ gerade} \quad \Longrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k.$$

Einsetzen in $2m^2 = n^2$ ergibt:

$$2m^2 = n^2 = (2k)^2 = 4k^2 \Longrightarrow m^2 = 2k^2 \Longrightarrow m^2 \text{ gerade} \Longrightarrow m \text{ gerade.}$$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass n und m teilerfremd sind.

Die Annahme $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ ist somit falsch $\Rightarrow$ $\sqrt{2}$ ist irrational. ■

1.2 Mengen

Definition: *Eine Menge ist eine Kollektion von paarweise verschiedenen Objekten. Die einzelnen Objekte werden Elemente der Menge genannt.*

Beispiele für Mengen.

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ Menge der natürlichen Zahlen;
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ Menge der nicht-negativen ganzen Zahlen;
- Studierende der TUHH;
- Hörer der Analysis I im WS 2018/2019 an der TUHH;
- Menge der Primzahlen.

Notationen: Sei M eine Menge.

$$
\begin{aligned}
a \in M &\iff a \text{ ist ein Element der Menge } M \\
a \notin M &\iff \neg(a \in M)
\end{aligned}
$$

Definition von Mengen.

- Aufzählung der Elemente: $M := \{1, 2, 3, 4\}$
- Charakterisierende Eigenschaft der Menge, $M := \{x \in \Omega \,|\, A(x)\}$

Bedeutung der verwendeten Symbole.

$:=$ "wird definiert durch"

$A(x)$ Aussageform, definiert für Elemente x aus dem Grundbereich Ω

Teilmengen von Mengen.

$$M \subset N \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x : (x \in M \Longrightarrow x \in N)$$

Gleichheit von Mengen.

$$M = N \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x : (x \in M \Longleftrightarrow x \in N)$$

Die leere Menge. Menge, die kein Element enthält. Bezeichnung: $\emptyset$

Ordnungseigenschaften.

- $M \subset M$;
- $(M \subset N) \wedge (N \subset M) \quad \Longrightarrow \quad M = N$;
- $(M \subset N) \wedge (N \subset P) \quad \Longrightarrow \quad M \subset P$.

Verknüpfung von Mengen.

$$
\begin{array}{lcll}
M \cup N & := & \{x \,|\, x \in M \vee x \in N\} & \text{(Vereinigung)} \\
M \cap N & := & \{x \,|\, x \in M \wedge x \in N\} & \text{(Durchschnitt)} \\
M \setminus N & := & \{x \,|\, x \in M \wedge x \notin N\} & \text{(Differenz)} \\
M \times N & := & \{(a, b) \,|\, a \in M \wedge b \in N\} & \text{(Cartesisches Produkt)} \\
\mathcal{P}(M) & := & \{X \,|\, X \subset M\} & \text{(Potenzmenge)}
\end{array}
$$

Bemerkungen und weitere Bezeichnungen.

- Gilt $M \cap N = \emptyset$, so nennt man M und N `disjunkt`.
- Verknüpfung von endlich vielen Mengen.

$$
\begin{aligned}
\bigcup_{k=1}^{n} A_k &= A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \\
&:= \{a \,|\, \exists\, i \in \{1, \ldots, n\} : a \in A_i\} \\
\bigcap_{k=1}^{n} A_k &= A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \\
&:= \{a \,|\, \forall\, i \in \{1, \ldots, n\} : a \in A_i\} \\
\prod_{k=1}^{n} A_k &= A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \\
&:= \{(a_1, \ldots, a_n) \,|\, \forall\, i \in \{1, \ldots, n\} : a_i \in A_i\}
\end{aligned}
$$

Weitere Bemerkungen und Bezeichnungen.

- Für geordnete Paare bzw. n-Tupel gilt:

$$(a_1, a_2) = (b_1, b_2) \iff a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2$$
$$(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n) \iff \forall i \in \{1, \dots, n\} : x_i = y_i$$

- Wichtige Cartesische Produkte:
  - die Euklidische Ebene

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$$

  - der dreidimensionale Euklidische Raum

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \,|\, x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

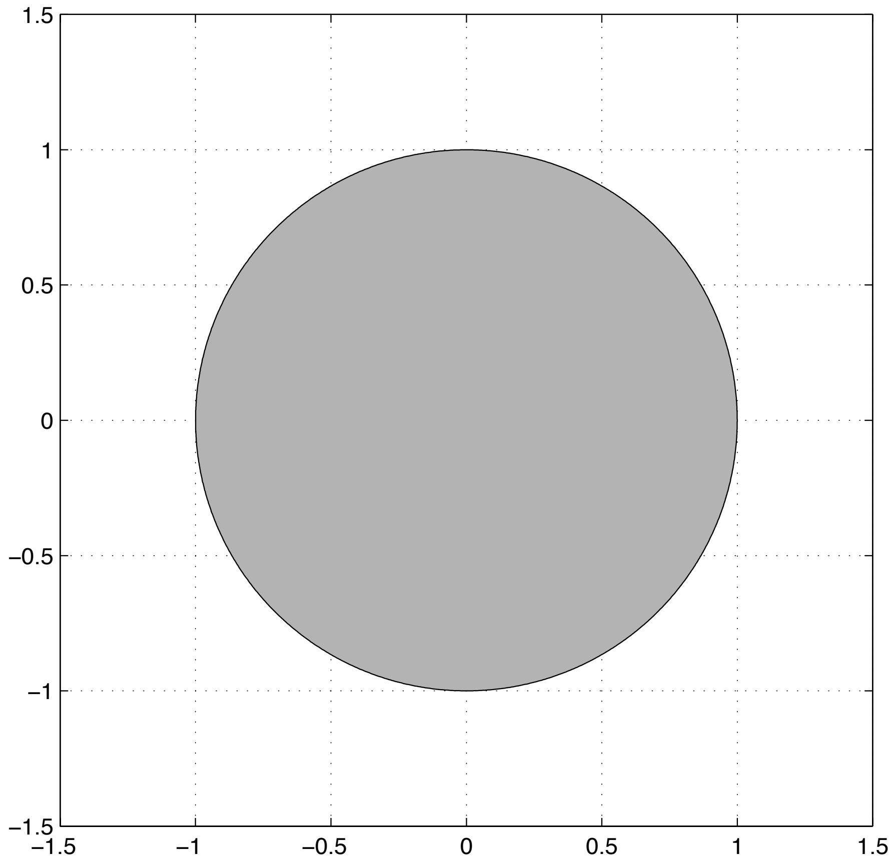
  - der n-dimensionale Euklidische Raum

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n\text{-fach}} = \{(x_1, \dots, x_n) \,|\, x_i \in \mathbb{R}\}$$

Der Einheitskreis.

- Kreisscheibe mit Radius 1 (Einheitskreis)

$$A := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \right\}$$



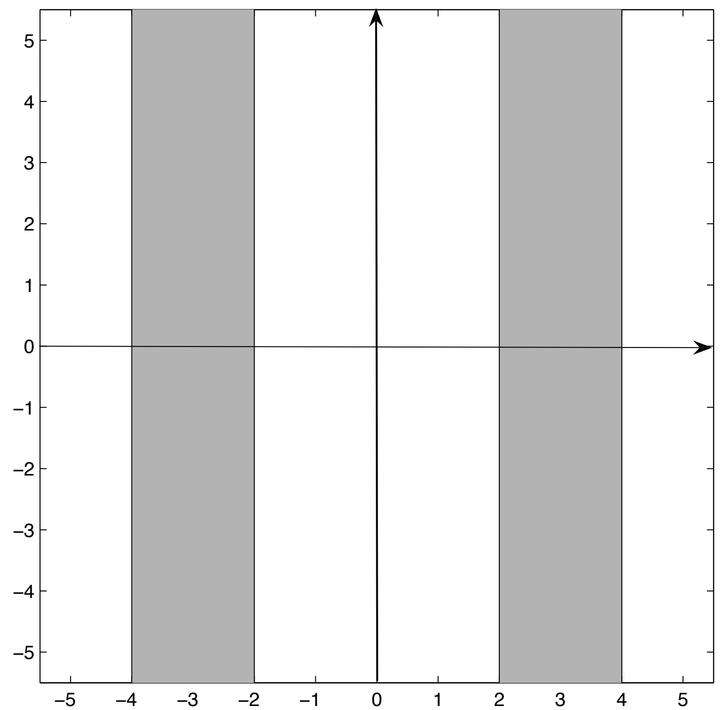
Zwei Streifen. $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 5 \le x^2 + 1 \le 17\}$

Beachte:

$$5 \le x^2 + 1 \le 17 \quad \Longleftrightarrow \quad 4 \le x^2 \le 16 \quad \Longleftrightarrow \quad -4 \le x \le -2 \vee 2 \le x \le 4$$

und somit gilt

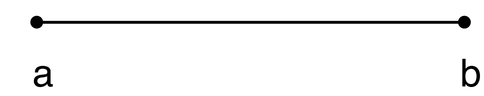
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -4 \le x \le -2 \vee 2 \le x \le 4\}.$$



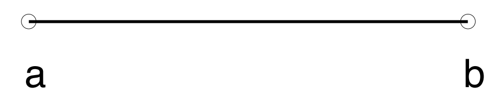
Intervalle in $\mathbb{R}$.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

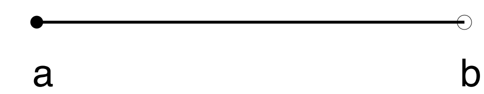
$[a, b] \quad := \quad \{x \mid a \le x \le b\}$ abgeschlossenes Intervall



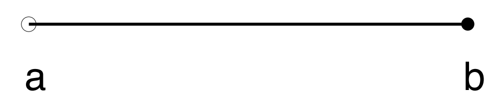
$(a, b) \quad := \quad \{x \mid a < x < b\}$ offenes Intervall



$[a, b) \quad := \quad \{x \mid a \le x < b\}$ halboffenes Intervall



$(a, b] \quad := \quad \{x \mid a < x \le b\}$ halboffenes Intervall



1.3 Funktionen

Definition: *Seien M und N Mengen. Unter einer* Funktion *(oder* Abbildung*) von M in N verstehen wir eine Vorschrift, die jedem Element $x \in M$ genau ein Element $y \in N$ zuordnet.*

Notationen und Bezeichnungen.

- $f : M \longrightarrow N$, $y = f(x)$ bzw. $x \longmapsto f(x)$ für alle $x \in M$. Somit gilt:

$$f : M \longrightarrow N \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall x \in M : \exists_1 y \in N : y = f(x).$$

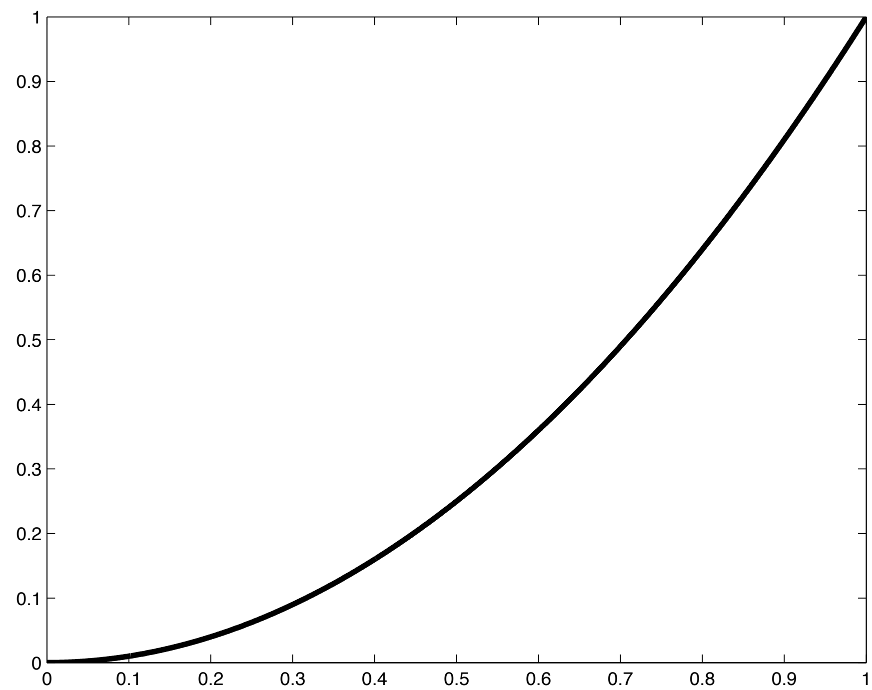
- M heißt Definitionsbereich (oder Urbildbereich) von f;
- N heißt Wertebereich (oder Bildbereich) von f;
- Die Menge

$$\mathrm{graph}(f) = \{(x, f(x)) | x \in M\} \subset M \times N$$

heißt Graph der Funktion f.

Beispiel.

- Funktion $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, definiert durch $f(x) = x^2$
- $M = [0,1]$ Definitionsbereich;
- $N = [0,1]$ Wertebereich.



Graph von $f(x) = x^2$.

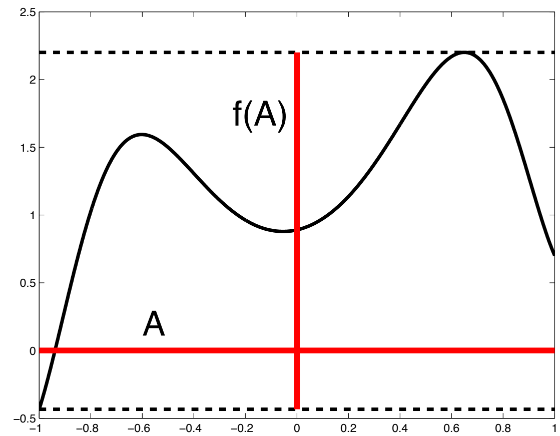
Weitere Notationen und Bezeichnungen.

Sei $f : M \longrightarrow N$ eine Funktion.

- Zu $A \subset M$ heißt die Menge

$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\} \subset N$$

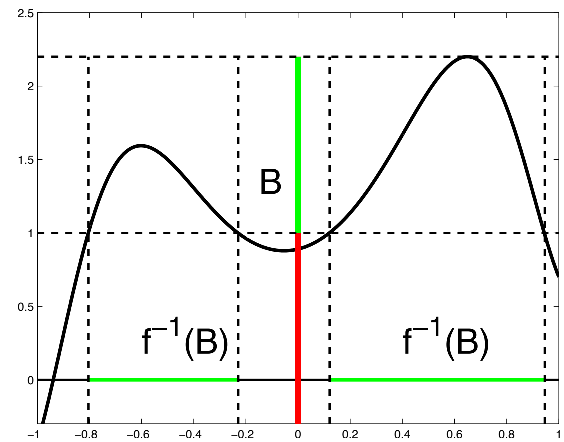
das **Bild** von A unter der Funktion f.



- Zu $B \subset N$ heißt die Menge

$$f^{-1}(B) = \{a \in M \mid f(a) \in B\} \subset M$$

das **Urbild** von B unter der Funktion f.



Surjektive, injektive und bijektive Funktionen.

Definition. Sei $f : M \longrightarrow N$ eine Funktion.

Dann heißt f surjektiv, falls die Gleichung $f(x) = y$ für jedes $y \in N$ mindestens eine Lösung $x \in M$ besitzt, d.h.

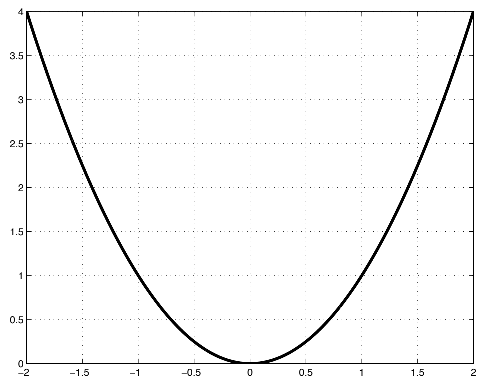
$$\forall y \in N \quad \exists x \in M : y = f(x).$$

Weiterhin heißt f injektiv, falls die Gleichung $f(x) = y$ für $y \in N$ höchstens eine Lösung $x \in M$ besitzt, d.h.

$$\forall x_1, x_2 \in M : f(x_1) = f(x_2) \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2.$$

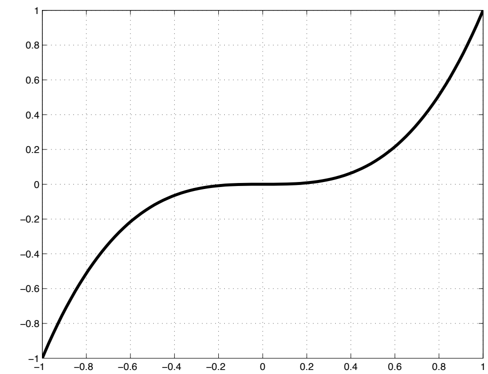
Schließlich heißt f bijektiv, falls f injektiv und surjektiv ist. $\square$

Beispiele.



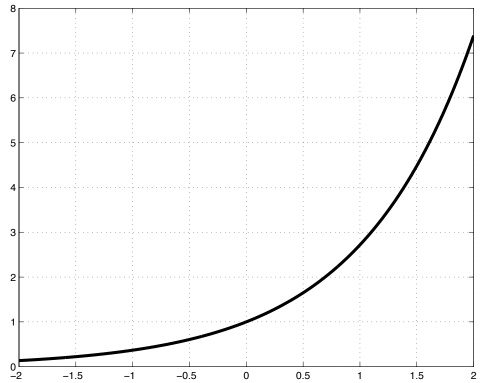
$f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty),\ f(x) = x^2$

surjektiv, nicht injektiv.



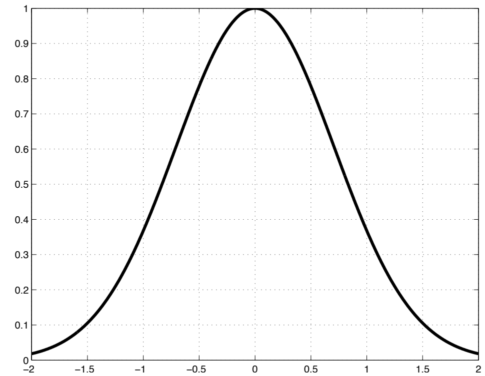
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^3$

bijektiv.



$f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty),\ f(x) = \exp(x)$

injektiv, nicht surjektiv.



$f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty),\ f(x) = \exp(-x^2)$

weder injektiv noch surjektiv.

Bemerkungen.

- Eine injektive Funktion $f : M \longrightarrow N$ lässt sich *invertieren*, denn zu jedem $y \in f(M)$ existiert *genau ein* $x \in M$ mit $y = f(x)$.

- Für eine injektive Funktion $f : M \longrightarrow N$ wird deren Umkehrfunktion $f^{-1} : f(M) \longrightarrow M$ definiert durch

$$f^{-1}(y) = x \qquad \text{für } y \in f(M), \text{ wobei } f(x) = y.$$

- Falls $f : M \longrightarrow N$ bijektiv ist, so gilt $f(M) = N$ und $f^{-1}(N) = M$, d.h.

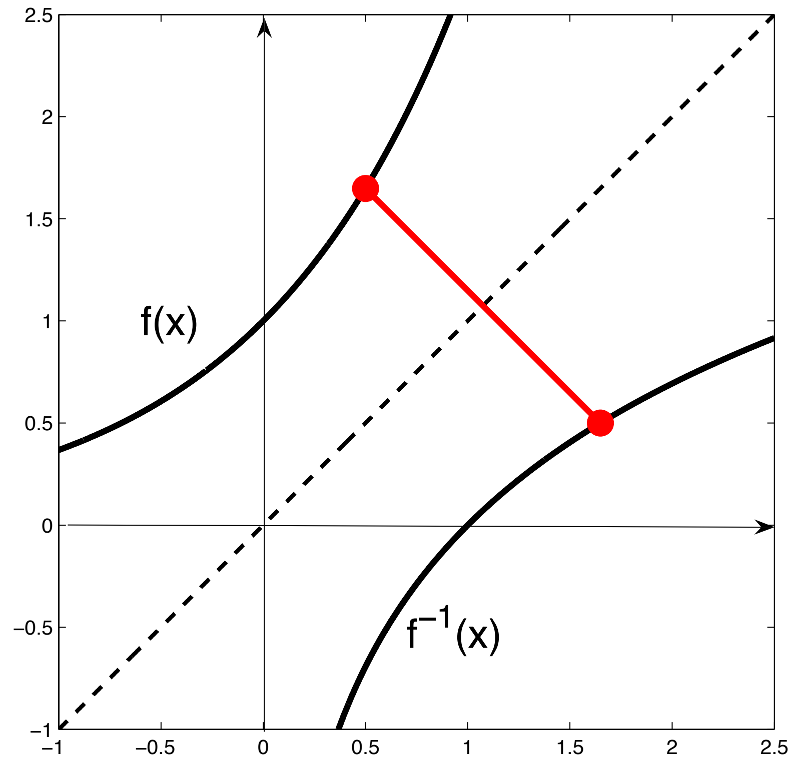
$$M \xrightarrow{f} N \qquad \text{und} \qquad N \xrightarrow{f^{-1}} M.$$

Beispiel.

- $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$, definiert durch $f(x) = x^2$.
- $f^{-1} : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ mit $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.
- Dann: $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2) = \sqrt{x^2} = x$ für alle $x \in [0, 1]$.
- Ebenso: $f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$ für alle $x \in [0, 1]$.

Bemerkung und Beispiel.

Sei $f : M \longrightarrow N$ eine reellwertige injektive Funktion einer reellen Variablen, d.h. $M, N \subset \mathbb{R}$. Dann erhält man den Graphen der Umkehrfunktion f^{-1} aus dem Graphen von f durch Spiegelung an der Diagonalen $x = y$.



Konstruktion der Umkehrfunktion.

Komposition von Funktionen.

Definition: Seien $f : M \longrightarrow N$ und $g : N \longrightarrow P$ Funktionen. Dann ist die Komposition $g \circ f$ von f und g eine Funktion, definiert durch

$$g \circ f : M \longrightarrow P \qquad (g \circ f)(x) = g(f(x)), \qquad \text{für } x \in M.$$

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$$

$$M \xrightarrow{g \circ f} P$$

Eigenschaften von Kompositionen.

- Assoziativität. Für Funktionen $f : M \longrightarrow N$, $g : N \longrightarrow P$, $h : P \longrightarrow Q$ gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

- Kompositionen sind im Allgemeinen nicht kommutativ, d.h.

$$g \circ f \neq f \circ g.$$

Gegenbeispiel: Seien $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, definiert durch

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 2x, \\ g(x) &= x + 1. \end{aligned}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(x^2 + 2x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2, \\ (f \circ g)(x) &= f(x+1) = (x+1)^2 + 2(x+1) = x^2 + 4x + 3, \end{aligned}$$

und somit gilt $g \circ f \neq f \circ g$.

Die symmetrische Gruppe.

Definition: Sei M eine nichtleere Menge. Dann heißt die Menge

$$S(M) = \{f : M \longrightarrow M \,|\, f \text{ bijektiv } \}$$

die symmetrische Gruppe von M. Die symmetrische Gruppe $S(M)$ enthält die Identität $\mathrm{id}_M : M \longrightarrow M$, definiert durch $\mathrm{id}_M(x) = x$ für alle $x \in M$. □

Die symmetrische Gruppe $S(M)$ von M erfüllt die Gruppenaxiome.

(G1) Es gilt das Assoziativgesetz

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \qquad \text{für alle } f, g, h \in S(M).$$

(G2) Die Identität id_M ist das neutrale Element in $S(M)$, d.h. es gilt

$$f \circ \mathrm{id}_M = \mathrm{id}_M \circ f = f \qquad \text{für alle } f \in S(M).$$

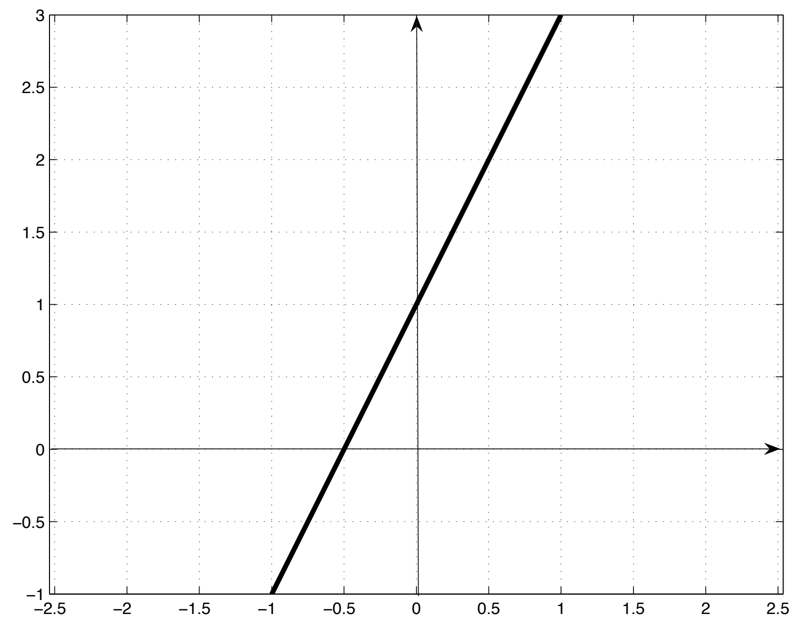
(G3) Jede Funktion $f \in S(M)$ besitzt ein Inverses $f^{-1} \in S(M)$ mit

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_M \qquad \text{für alle } f \in S(M).$$

Elementare reelle Funktionen.

- Affin-lineare Funktionen:

$$f(x) = a_1 x + a_0 \qquad \text{für } a_0, a_1 \in \mathbb{R}.$$

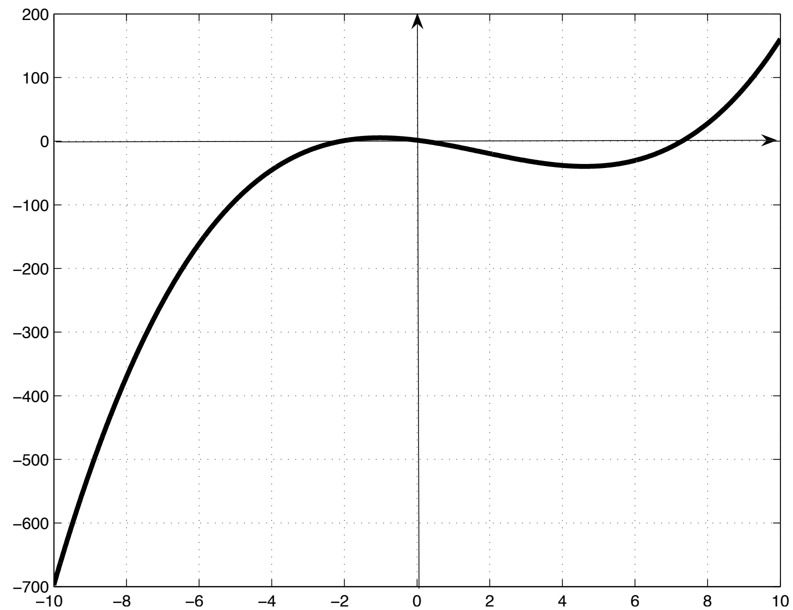


Die affin-lineare Funktion

$$f(x) = 2x + 1.$$

- **Polynome**:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad \text{für } a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \text{ mit } a_n \neq 0.$$



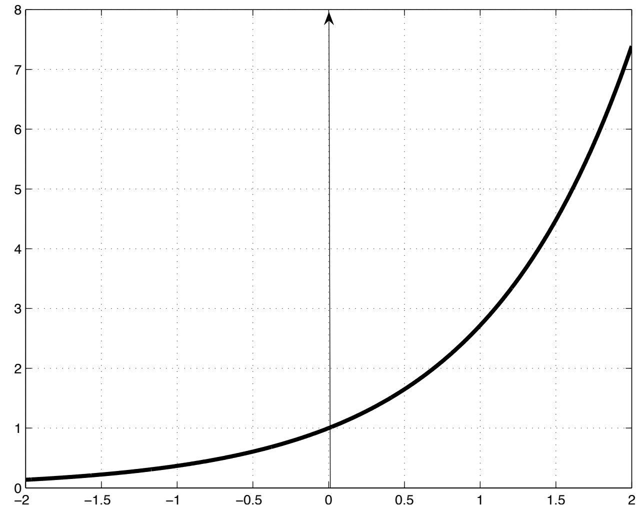
Das kubische Polynom

$$f(x) = 0.5x^3 - 2.7x^2 - 7.1x + 1.5.$$

- **Die Exponentialfunktion**: $f(x) = a^x$ für **Basis** $a > 0$.

Spezialfall: Basis e, wobei die **Eulersche Zahl** e definiert ist durch

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2.71828182845904523536\ldots$$



Die Exponentialfunktion $f(x) = \exp(x) = e^x$.

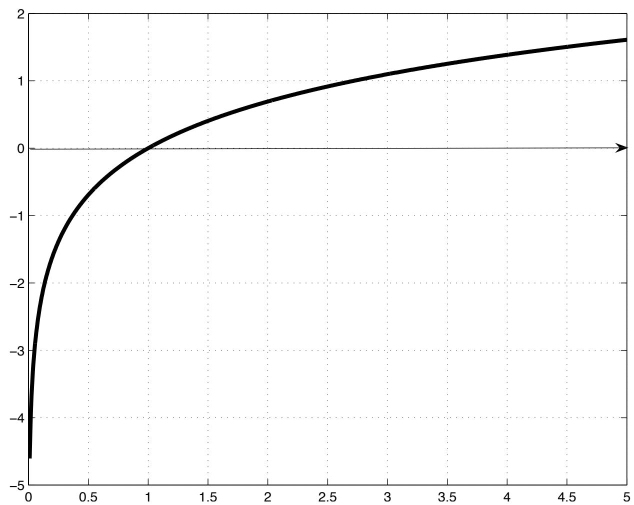
Es gilt die *Funktionalgleichung*

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

- Der Logarithmus, Umkehrfunktion der (injektiven) Exponentialfunktion,

$$f(x) = \log_a(x) : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{für Basis } a > 0.$$

Spezialfall: Basis e, $\log(x) = \log_e(x)$, der natürliche Logarithmus.



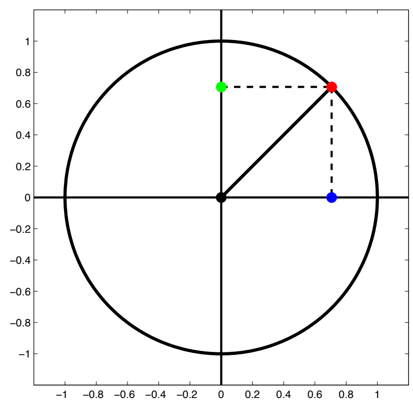
Der natürliche Logarithmus $f(x) = \log(x)$**.**

Es gilt die *Funktionalgleichung*

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y) \qquad \text{für alle } x, y > 0.$$

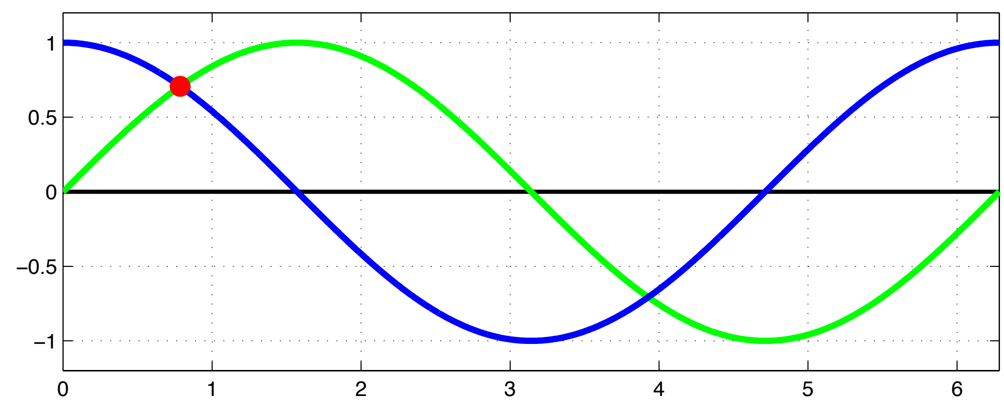
Trigonometrische Funktionen.

$$\begin{aligned} \sin &: [0, 2\pi) \longrightarrow [-1, 1] \quad (\texttt{Sinus}) \\ \cos &: [0, 2\pi) \longrightarrow [-1, 1] \quad (\texttt{Cosinus}) \end{aligned}$$



Der Einheitskreis.

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$



$\sin : [0, 2\pi) \longrightarrow [-1, 1]$;

$\cos : [0, 2\pi) \longrightarrow [-1, 1]$.

Eigenschaften trigonometrischer Funktionen.

- Für alle $\varphi \in [0, 2\pi)$ gilt

$$\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1.$$

- Symmetrie:

$$\begin{aligned} \sin(-\varphi) &= -\sin(\varphi) \qquad \text{für alle } \varphi \in [0, 2\pi) \\ \cos(-\varphi) &= \cos(\varphi) \qquad \text{für alle } \varphi \in [0, 2\pi) \end{aligned}$$

- Periodizität:

$$\begin{aligned} \sin(\varphi) &= \sin(\varphi + 2\pi) \\ \cos(\varphi) &= \cos(\varphi + 2\pi) \end{aligned}$$

somit sind Sinus und Cosinus auf ganz $\mathbb{R}$ definiert,

$$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1] \qquad \text{und} \qquad \cos : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1].$$

Weitere Eigenschaften trigonometrischer Funktionen.

- Wertetafel:

φ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin\varphi$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos\varphi$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

- Additionstheoreme: Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$
\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta
\end{aligned}
$$

2 Zahlenbereiche

2.1 Natürliche Zahlen

Die Menge

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

der natürlichen Zahlen wird formal durch die Peano-Axiome definiert:

(A1) $1 \in \mathbb{N}$;

(A2) $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow n + 1 \in \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}$;

(A3) $n \neq m \Longrightarrow n + 1 \neq m + 1$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$;

(A4) $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow n + 1 \neq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$;

(A5) Für $A \subset \mathbb{N}$ gilt das Vollständigkeitsaxiom:

$$1 \in A \wedge (\forall n : [n \in A \Rightarrow (n+1) \in A]) \qquad \Longrightarrow \qquad A = \mathbb{N}.$$

Bemerkung: Die *Nachfolgeabbildung* $n \longmapsto n + 1$ ist injektiv.

Beweisprinzip der vollständigen Induktion.

Dabei ist die Gültigkeit einer Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zu beweisen, d.h. es ist zu zeigen

$$\forall n \in \mathbb{N} : A(n),$$

wobei $A(n)$ eine Aussageform ist, die von $n \in \mathbb{N}$ abhängt.

Beweisschritte der vollständigen Induktion.

(I1) Induktionsanfang: $n = 1$
Zeige $A(1)$;

(I2) Induktionsannahme:
Es gelte $A(n)$;

(I3) Induktionsschluss: $n \longrightarrow n+1$
Zeige die Implikation $A(n) \Longrightarrow A(n+1)$.

Falls Schritte **(I1)-(I3)** durchführbar, so gilt die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 1.

Bestimme die Anzahl t_n der Teilmengen einer n-elementigen Menge

$$A_n = \{a_1, \ldots, a_n\}.$$

Vorgehen: Betrachte zunächst kleine $n \in \mathbb{N}$, z.B. $n = 1, 2, 3$.

- $n = 1$: Die Menge $A_1 = \{a_1\}$ besitzt nur die Teilmengen $\emptyset, \{a_1\}$.
  Somit $t_1 = 2$.

- $n = 2$: Die Menge $A_2 = \{a_1, a_2\}$ besitzt die vier Teilmengen

$$\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_1, a_2\},$$

  und somit gilt $t_2 = 4$.

- $n = 3$: Die Menge $A_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$ besitzt $t_3 = 8$ Teilmengen.

Vermutung: Es gilt $t_n = 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz: *Eine* n*-elementige Menge* $A_n = \{a_1, \dots, a_n\}$ *besitzt* $t_n = 2^n$ *Teilmengen.*

Beweis: durch vollständige Induktion über n.

- Induktionsanfang ($n = 1$): Es gilt $t_1 = 2 = 2^1$.
- Induktionsannahme: Es gelte $t_n = 2^n$ für $n \in \mathbb{N}$.
- Induktionsschluss ($n \longrightarrow n + 1$):

Zu zeigen: $A_{n+1} = \{a_1, \dots, a_n, a_{n+1}\}$ hat $t_{n+1} = 2^{n+1}$ Teilmengen.

Schreibe $\mathcal{P}(A_{n+1}) = K_1 \cup K_2$ für die Potenzmenge von A_{n+1}, wobei

$$\begin{aligned} T \in K_1 \quad &\Longleftrightarrow \quad a_{n+1} \notin T \\ T \in K_2 \quad &\Longleftrightarrow \quad a_{n+1} \in T \end{aligned}$$

Nach Induktionsannahme besitzt K_1 genau $t_n = 2^n$ Elemente.

Ebenso besitzt K_2 nach Induktionsannahme $t_n = 2^n$ Elemente.

Weiterhin gilt $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ nach Konstruktion.

Somit hat $\mathcal{P}(A_{n+1})$ insgesamt $t_{n+1} = t_n + t_n = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$ Elemente. ■

Beispiel 2.

Bestimme die Anzahl p_n der verschiedenen Anordnungen (Permutationen) für die Elemente einer n-elementigen Menge $A_n = \{1, \ldots, n\}$.

Vorgehen: Betrachte zunächst kleine $n \in \mathrm{N}$, z.B. $n = 1, 2, 3$.

- $n = 1$: Das Element in $A_1 = \{1\}$ besitzt nur eine Anordnung, (1).
  Somit $p_1 = 1$.
- $n = 2$: Für die Elemente in $A_2 = \{1, 2\}$ gibt es zwei Anordnungen,
  $$(1, 2), (2, 1).$$
  Somit gilt $p_2 = 2$.
- $n = 3$: Für die Elemente in $A_3 = \{1, 2, 3\}$ gibt es sechs Anordnungen,
  $$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1).$$
  Somit gilt $p_3 = 6$.

Vermutung: Es gilt $p_n = n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz: *Es gibt $p_n = n!$ Permutationen für das n-tupel $(1, 2, \ldots, n)$.*

Beweis: durch vollständige Induktion über n.

- Induktionsanfang $(n = 1)$: Es gilt $p_1 = 1$.
- Induktionsannahme: Es gelte $p_n = n!$ für $n \in \mathbb{N}$.
- Induktionsschluss $(n \longrightarrow n + 1)$:

Es gibt nach Induktionsannahme je $n!$ Permutationen für die $(n + 1)$-Tupel

$$\left\{ \begin{array}{c} (i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, i_n, n+1), \\ (i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, n+1, i_n), \\ \vdots \\ (i_1, n+1, i_2, \ldots, i_{n-1}, i_n), \\ (n+1, i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, i_n) \end{array} \right\} \quad i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, n\} \text{ paarweise verschieden.}$$

und somit gilt $p_{n+1} = \underbrace{n! + \ldots + n!}_{(n+1)\text{-fach}} = (n + 1) \cdot n! = (n + 1)!$ ∎

Folgerung: Eine n-elementige Menge $\{a_1, \ldots, a_n\}$ besitzt genau

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \qquad \text{für } n, m \in \mathbb{N}_0 : 0 \leq m \leq n,$$

m-elementige Teilmengen. Dabei setzt man $0! = 1$.

Beweis: Es gibt $n!$ Permutationen von $(a_1, \ldots, a_n)$, bezeichnet mit

$$(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}), \qquad \text{wobei } \{i_1, \ldots, i_n\} = \{1, \ldots, n\}.$$

Betrachte nun die ersten m Plätze in $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$. Die $n!$ möglichen Permutationen

$$(a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}, a_{i_{m+1}}, \ldots, a_{i_n})$$

von $(a_1, \ldots, a_n)$ führen genau $m!(n-m)!$-mal auf die gleiche Teilmenge

$$\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}\} \subset \{a_1, \ldots, a_n\},$$

denn die $m!$ Permutationen der ersten m Plätze und die $(n-m)!$ Permutationen der restlichen $n-m$ Plätze verändern $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}\}$ nicht. Somit gibt es $\frac{n!}{m!(n-m)!} = \binom{n}{m}$ m-elementige Teilmengen von $\{a_1, \ldots, a_n\}$. $\blacksquare$

Einschub: Summen, Produkte und Potenzen.

Allgemeine Summen und Produkte.

$$\sum_{k=m}^{n} b_k \quad := \quad b_m + b_{m+1} + \cdots + b_n \quad (\text{falls } m \leq n)$$

$$\sum_{k=m}^{n} b_k \quad := \quad 0 \quad (\text{falls } m > n, \text{ leere Summe})$$

$$\prod_{k=m}^{n} b_k \quad := \quad b_m \cdot b_{m+1} \cdot \ldots \cdot b_n \quad (\text{falls } m \leq n)$$

$$\prod_{k=m}^{n} b_k \quad := \quad 1 \quad (\text{falls } m > n, \text{ leeres Produkt})$$

Einschub: Summen, Produkte und Potenzen.

Potenzen.

$$a^n := \begin{cases} \prod_{k=1}^{n} a & \text{für } n \geq 0 \\ 1/(a^{-n}) & \text{für } n < 0 \end{cases}$$

Potenzgesetze.

$$\begin{aligned} a^n \cdot a^m &= a^{n+m} \\ (a^n)^m &= a^{n \cdot m} \end{aligned}$$

Binomialkoeffizienten und deren Eigenschaften.

Definition: *Die Zahlen* $\binom{n}{m}$ *heißen* Binomialkoeffizienten.

Satz:

(a) Für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $0 < m \leq n$ gilt die Rekursionsformel

$$\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m-1},$$

wobei

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

(b) Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt der Binomische Lehrsatz

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Beweis von Teil (a): Es gilt

$$\begin{aligned}
\binom{n}{m} + \binom{n}{m-1} &= \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!} \\
&= \frac{n!(n+1-m) + n!m}{m!(n+1-m)!} \\
&= \frac{n!(n+1-m+m)}{m!(n+1-m)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!} \\
&= \binom{n+1}{m}.
\end{aligned}$$

■

Beweis von Teil (b): durch vollständige Induktion über n.

- Induktionsanfang ($n = 0$): Es gilt

$$(a+b)^0 = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1.$$

- Induktionsannahme: Für $n \geq 0$ gelte

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

- Induktionsschluss $(n \longrightarrow n+1)$:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} \\
&= \binom{n}{0}a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right]a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{n}a^{n+1}b \\
&= \binom{n+1}{0}a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1}a^{n+1}b^0 \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Direkte Berechnung der Binomialkoeffizienten.

Für $n, m \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq n$ gilt

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m} = \prod_{k=1}^{m}\frac{n-k+1}{k}.$$

Klassisches Beispiel: Zahlenlotto.

Es gibt

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!43!} = \frac{49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = 13983816$$

Möglichkeiten, aus einer 49-elementigen Menge eine 6-elementige Teilmenge auszuwählen.

Mit anderen Worten: Die Wahrscheinlichkeit, beim (klassischen) Zahlenlotto "6 aus 49" die 6 richtigen Zahlen zu tippen, beträgt

$$\frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13983816} = 0.0000000715112384201851 6\ldots$$

Rekursive Berechnung der Binomialkoeffizienten.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

Pascalsches Dreieck.

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^5 &= 1 \cdot a^0 b^5 + 5 \cdot a^1 b^4 + 10 \cdot a^2 b^3 + 10 \cdot a^3 b^2 + 5 \cdot a^4 b^1 + 1 \cdot a^5 b^0 \\
&= a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5
\end{aligned}
$$

2.2 Primzahlen

Definition: *Eine natürliche Zahl* $m \in \mathbb{N}$ *heißt* Teiler *von* $n \in \mathbb{N}$, *falls ein* $k \in \mathbb{N}$ *existiert mit*

$$n = k \cdot m.$$

Man schreibt dann auch $m|n$. □

Jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ besitzt offensichtlich die beiden Teiler 1 und n, denn es gilt stets

$$n = n \cdot 1 = 1 \cdot n$$

Existiert für $n > 1$ *kein* weiterer Teiler, so nennt man n eine Primzahl.

Die ersten Primzahlen lauten

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots$$

Bemerkung: Es gibt unendlich viele Primzahlen. ■

Hauptsatz der Zahlentheorie.

Satz: Jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ läßt sich als Produkt von Primzahlpotenzen schreiben,

$$n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{r_k},$$

wobei p_j Primzahl und $r_j \in \mathbb{N}_0$ für $1 \leq j \leq k$.

Beweis: durch Induktion über n.

- Induktionsanfang $(n = 1)$: Es gilt $1 = 2^0$.
- Induktionsannahme: Alle $k \leq n$ besitzen Primfaktorzerlegung.
- Induktionsschluss $(n \to n + 1)$:

Fall 1: Sei $n + 1$ Primzahl. Dann gilt $n + 1 = (n + 1)^1$.
Fall 2: Sei $n + 1$ *keine* Primzahl. Dann gibt es $k, m \leq n$ mit $n + 1 = k \cdot m$.
Somit besizt $n + 1$ eine Primfaktorzerlegung, da k und m je eine besitzen. ■

Bemerkung: Für $n > 1$ sind die (verschiedenen) Basen $p_1, \ldots, p_k$ und die zugehörigen Exponenten $r_1, \ldots, r_k \geq 1$ der Primfaktorzerlegung eindeutig.

ggT und kgV.

Definition: *Seien $n, m \in \mathbb{N}$ zwei natürliche Zahlen. Dann heißt*

$$\mathrm{ggT}(n, m) = \max\{k \mid\ k \textit{ teilt } n \textit{ und } k \textit{ teilt } m\}$$

der größte gemeinsame Teiler *(ggT) von n und m. Weiterhin heißt*

$$\mathrm{kgV}(n, m) = \min\{k \mid\ n \textit{ teilt } k \textit{ und } m \textit{ teilt } k\}$$

das kleinste gemeinsame Vielfache *(kgV) von n und m.* □

Beobachtung: Für

$$n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{r_k} \quad \text{und} \quad m = p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{s_k}$$

mit Primfaktoren $p_1, \ldots, p_k$ und Exponenten $r_1, \ldots, r_k, s_1, \ldots, s_k \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{ggT}(n, m) &= p_1^{\min(r_1,s_1)} \cdot p_2^{\min(r_2,s_2)} \cdot \ldots \cdot p_k^{\min(r_k,s_k)} \\ \mathrm{kgV}(n, m) &= p_1^{\max(r_1,s_1)} \cdot p_2^{\max(r_2,s_2)} \cdot \ldots \cdot p_k^{\max(r_k,s_k)} \end{aligned}$$

□

Beispiel. Für

$$\begin{aligned} n &= 525 = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^1 \\ m &= 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^0 \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{ggT}(525, 180) &= 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^0 = 15 \\ \mathrm{kgV}(525, 180) &= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^1 = 6300 \end{aligned}$$

und

$$n \cdot m = 525 \cdot 180 = 15 \cdot 6300 = \mathrm{ggT}(525, 180) \cdot \mathrm{kgV}(525, 180).$$

$\square$

Beobachtung: Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$n \cdot m = \mathrm{ggT}(n, m) \cdot \mathrm{kgV}(n, m).$$

$\square$

Der Euklidische Algorithmus.

Für $n, m \in \mathbb{N}$ läßt sich deren ggT mit dem `Verfahren der iterierten Division` (`Euklidischer Algorithmus`) bestimmen.

Vorüberlegung: Zu $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq m$, existieren eindeutige $q, r \in \mathbb{N}_0$ mit

$$n = q \cdot m + r, \qquad \text{wobei } 0 \leq r < m.$$

Algorithmus (Euklidischer Algorithmus) **:**

INPUT: $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$.

- Setze $r_0 = n, r_1 = m$ und $j = 1$;
- **REPEAT**
  - $r_{j-1} = q_j \cdot r_j + r_{j+1}$, wobei $0 \leq r_{j+1} < r_j$;
  - Setze $j = j + 1$;

  UNTIL $(r_{j+1} = 0)$

OUTPUT: $r_j = \text{ggT}(n, m)$.

Beispiel. Für $n = 3054$ und $m = 1002$ liefert der Euklidische Algorithmus:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3054 & = & 3 & \cdot & 1002 & + & 48 \\ 1002 & = & 20 & \cdot & 48 & + & 42 \\ 48 & = & 1 & \cdot & 42 & + & 6 \\ 42 & = & 7 & \cdot & \boxed{6} & + & 0 \end{array}$$

Somit gilt $\text{ggT}(3054, 1002) = 6$ und $\text{kgV}(3054, 1002) = 3054 \cdot 1002/6 = 510018$.

$\mathbb{Z}$-Kombination des $\text{ggT}(n, m)$ von n und m.

$$\begin{aligned} 6 &= 48 - 1 \cdot 42 \\ &= 48 - 1 \cdot (1002 - 20 \cdot 48) = 21 \cdot 48 - 1002 \\ &= 21 \cdot (3054 - 3 \cdot 1002) - 1002 = 21 \cdot 3054 - 64 \cdot 1002. \end{aligned}$$

Die $\mathbb{Z}$-Kombination von $n = 3054$ und $m = 1002$ ist gegeben durch

$$\text{ggT}(3054, 1002) = 6 = 21 \cdot 3054 - 64 \cdot 1002.$$

2.3 Reelle Zahlen

Erweiterung des Zahlenbereichs der natürlichen Zahlen

- `Ganze Zahlen`

$$\mathbb{Z} := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

- `Rationale Zahlen`

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

BEACHTE: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

ABER: Die Zahl $\sqrt{2}$ lässt sich beliebig genau durch rationale Zahlen aus $\mathbb{Q}$ *approximieren*, d.h. zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $q \in \mathbb{Q}$ mit

$$|\sqrt{2} - q| < \epsilon.$$

DAHER: Definieren den Zahlenbereich $\mathbb{R}$ der `reellen Zahlen`.

Axiomensystem für die reellen Zahlen.

(I) Regeln der Addition (Abelsche Gruppe):

$$\begin{array}{llcllcl}
\text{(a)} & x+(y+z) & = & (x+y)+z & & & \\
\text{(b)} & x+y & = & y+x & & & \\
\text{(c)} & x+0 & = & 0+x & = & x & \\
\text{(d)} & x+(-x) & = & (-x)+x & = & 0 &
\end{array}$$

(II) Regeln der Multiplikation:

$$\begin{array}{llclclll}
\text{(a)} & x\cdot(y\cdot z) & = & (x\cdot y)\cdot z & & & \\
\text{(b)} & x\cdot y & = & y\cdot x & & & \\
\text{(c)} & x\cdot 1 & = & 1\cdot x & = & x & \\
\text{(d)} & x\cdot\left(\frac{1}{x}\right) & = & \left(\frac{1}{x}\right)\cdot x & = & 1 & \text{für } x \neq 0
\end{array}$$

(III) Distributivgesetz: $x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$

Weitere Axiome für $\mathbb{R}$.

(IV) Ordnungseigenschaften:

(a) $x \leq y \vee y \leq x$

(b) $x \leq x$

(c) $x \leq y \wedge y \leq x \implies x = y$

(d) $x \leq y \wedge y \leq z \implies x \leq z$

(e) $x \leq y \implies x + z \leq y + z$

(f) $x \leq y \wedge z \geq 0 \implies x \cdot z \leq y \cdot z$

(V) Vollständigkeitsaxiom (Dedekind, 1872):

Sei $\mathbb{R} = L \cup R$ zerlegt in nichtleere Mengen $L, R \neq \emptyset$ mit $\forall\, x \in L,\, y \in R : x < y$.

Dann gibt es genau eine Schnittzahl $s \in \mathbb{R}$ mit

$$\forall\, x \in L,\, y \in R : \quad x \leq s \leq y.$$

Bemerkungen.

- Eine nichtleere Menge mit (I) heißt `Abelsche Gruppe`.
- Eine nichtleere Menge mit (I)–(III) heißt `Körper`.
- Ein Körper mit (IV) heißt `angeordneter Körper`.
- Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ bilden einen angeordneten Körper.
- **ABER:** Die rationalen Zahlen erfüllen nicht das Vollständigkeitsaxiom!

DENN: Für

$$\begin{aligned} L &:= \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 < 2 \vee x < 0\} \\ R &:= \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 > 2 \wedge x > 0\} \end{aligned}$$

gibt es keine Schnittzahl in $\mathbb{Q}$. Die Schnittzahl wäre $s = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Rechnen mit Ungleichungen und Beträgen.

$$
\begin{array}{ll}
(1) & x \le y \Longrightarrow -x \ge -y \\
(2) & x \le y \wedge z \le 0 \Longrightarrow x \cdot z \ge y \cdot z \\
(3) & x^2 \ge 0 \\
(4) & x \le y \wedge u \le v \Rightarrow x + u \le y + v \\
(5) & 0 \le x \le y \wedge 0 \le u \le v \Longrightarrow x \cdot u \le y \cdot v
\end{array}
$$

Beweis: Mit Ordnungsaxiomen (IV), z.B.

(1):

$$x \le y \Longrightarrow x + (-x - y) \le y + (-x - y) \Longrightarrow -y \le -x.$$

(2):

$$
\begin{aligned}
x \le y \wedge z \le 0 \quad & \Longrightarrow \quad x \le y \wedge (-z) \ge 0 \\
& \Longrightarrow \quad x \cdot (-z) \le y \cdot (-z) \\
& \Longrightarrow \quad x \cdot z \ge y \cdot z
\end{aligned}
$$

Definition: *Zu* $a \in \mathbb{R}$ *heißt*

$$|a| := \begin{cases} a & \textit{falls } a \geq 0; \\ -a & \textit{falls } a < 0; \end{cases}$$

der Betrag *von* a.

Zu $a, b \in \mathbb{R}$ *heißt* $|a - b|$ *der (nichtnegative)* Abstand *der Zahlen* a *und* b.

Eigenschaften:

(1) $|a| \geq 0$

(2) $|a| = 0 \implies a = 0$

(3) $|ab| = |a|\,|b|$

(4) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)

(5) $U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\} \quad (\varepsilon > 0)$

$= (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \quad$ (ε-Umgebung von a)

Definition: *Sei $M \subset \mathbb{R}$ Teilmenge von $\mathbb{R}$.*

(1a) Dann heißt $x \in \mathbb{R}$ `obere Schranke` *von M, falls $\forall w \in M : w \leq x$.*

(1b) $x \in \mathbb{R}$ heißt `untere Schranke` *von M, falls $\forall w \in M : w \geq x$.*

(2a) M heißt `nach oben beschränkt`*, falls es eine obere Schranke von M gibt.*

(2b) M heißt `nach unten beschränkt`*, falls es untere Schranke von M gibt.*

(3a) $s \in \mathbb{R}$ heißt `Supremum` *von M, falls s die kleinste obere Schranke von M ist.*

(3b) $s \in \mathbb{R}$ heißt `Infimum` *von M, falls s die größte untere Schranke von M ist.*

Bezeichnungen:

- $\sup(M)$ Supremum von M;
- $\inf(M)$ Infimum von M.

Beispiele:

(1) $M = [1, 2) \subset \mathbb{R}$. Dann gilt $\inf(M) = 1$, $\sup(M) = 2$.

(2) Für $M = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x = \frac{2n+1}{n(n+1)}, n \in \mathbb{N}\} = \left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}, \frac{9}{20}, \frac{11}{30}, \ldots\right\}$ gilt
$\inf(M) = 0$, $\sup(M) = 3/2$.

Satz:

Jede nichtleere nach oben beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum.

Jede nichtleere nach unten beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Infimum.

Beweis: Mit Hilfe des Vollständigkeitsaxioms (V).

Folgerungen:

(1) Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist *nicht* nach oben beschränkt.

(2) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$x > 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N} : 0 < \frac{1}{n} < x$$

(3) Zwischen zwei reellen Zahlen $x < y$ liegen (unendlich viele) rationale Zahlen.

3 Normen, Folgen und Konvergenz

3.1 Normierte Vektorräume

Definition: *Sei V ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$ heißt* Norm *auf V, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind.*

(N1) $\|v\| = 0 \iff v = 0$ *(*Definitheit*);*

(N2) $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ *für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in V$ (*Homogenität*);*

(N3) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ *für alle $v, w \in V$ (*Dreiecksungleichung*).*

V zusammen mit $\|\cdot\|$ heißt dann normierter Vektorraum*.*

Beispiele für Normierte Vektorräume.

- $\mathbb{R}$ mit der Betragsfunktion $|\cdot|$ ist ein normierter Vektorraum.
- Für $n \geq 1$ ist der $\mathbb{R}^n$, zusammen mit der p-Norm, $p \in \mathbb{N}$,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p}, \qquad \text{für } x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n,$$

ein normierter Vektorraum.

Spezialfall: Für $p = 2$ bekommt man die Euklidische Norm

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} \qquad \text{für } x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

Weiterhin $(p = \infty)$**:** Die Maximumnorm

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \qquad \text{für } x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

Weitere Beispiele für Normierte Vektorräume.

Sei $V = C[a, b]$ der Vektorraum aller *stetigen* Funktionen auf $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

- Dann ist die p-Norm

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, \qquad \text{für } f \in C[a, b],$$

für $p \in \mathbb{N}$ eine Norm auf V.

- **Wichtiger Spezialfall:** Für $p = 2$ ist die Euklidische Norm

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 \, dx}, \qquad \text{für } f \in C[a, b],$$

eine Norm auf V.

- **Weiterhin** $(p = \infty)$**:** Die Maximumnorm ist gegeben durch

$$\|f\|_\infty = \max_{a \le x \le b} |f(x)|, \qquad \text{für } f \in C[a, b].$$

3.2 Folgen

Definition: *Sei V normierter Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$. Eine* Folge *ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to V$, $n \mapsto a_n$, kurz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(a_n)_{n\geq 1}$.* □

Beispiele für Folgen.

- Reelle Folgen (Folgen reeller Zahlen), d.h. $V = \mathbb{R}$, z.B. ist

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad \text{für } n \in \mathbb{N},$$

  eine reelle Folge.

- Komplexe Folgen (Folgen komplexer Zahlen), d.h. $V = \mathbb{C}$, z.B. ist

$$a_n = i^n, \qquad \text{für } n \in \mathbb{N},$$

  eine komplexe Folge.

Weitere Beispiele für Folgen.

- Vektorenfolgen (Folgen von Vektoren), $V = \mathbb{R}^n$ oder $V = \mathbb{C}^n$, z.B. ist

$$a_n = \left(\frac{1}{n}, n, \frac{1}{n^2}\right)^T \in \mathbb{R}^3, \qquad \text{für } n \in \mathbb{N},$$

  eine Folge reeller Vektoren.

- Funktionenfolgen (Folge von Funktionen), etwa $V = C[a, b]$, z.B. ist für $[a, b] = [0, 1]$ die Folge

$$f(x) = x^n, \qquad \text{für } x \in [0, 1] \text{ und } n \in \mathbb{N},$$

  eine Funktionenfolge.

Rechenoperationen mit Folgen.

Die Menge aller Folgen in V bildet einen Vektorraum, $V^{\mathbb{N}}$, für den die *Addition* und *skalare Multiplikation* wie folgt definiert sind.

$$\begin{aligned} (a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} &:= (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ \lambda(a_n)_{n\in\mathbb{N}} &:= (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

Rekursion und Iteration.

Folgen lassen sich `rekursiv` beschreiben durch

$$a_{n+1} := \Phi(n, a_n), \qquad \text{für } n \in \mathbb{N},$$

wobei

$$\Phi : \mathbb{N} \times V \to V$$

eine bestimmte `Iterationsvorschrift` bezeichnet.

Das Bisektionsverfahren (Intervallhalbierung).

- **Ziel:** Bestimme eine Nullstelle einer stetigen Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

- **Voraussetzung:** $f(a) \cdot f(b) < 0$.

- **Iteration:** Definiere zwei Folgen $(u_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(v_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ rekursiv mit den Startwerten $(u_0, v_0) = (a, b)$ und der folgenden Iterationsvorschrift.

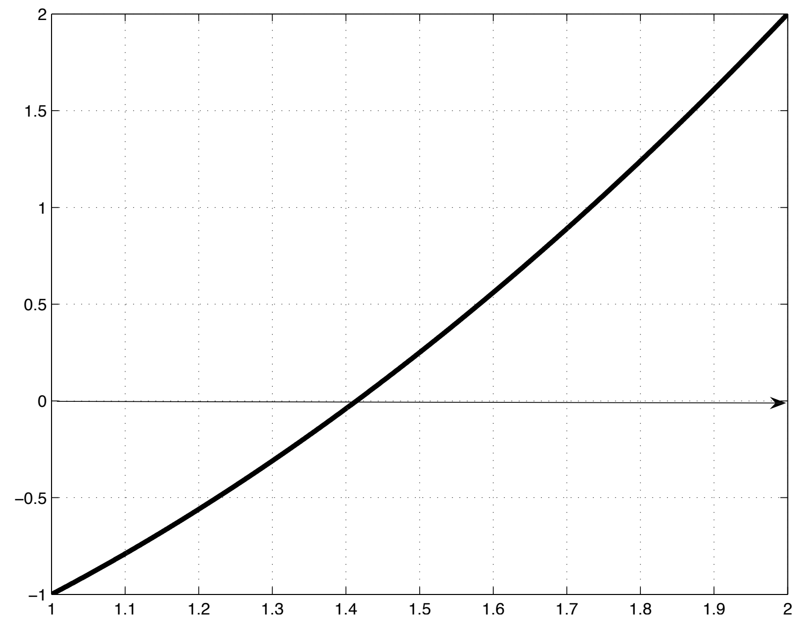
$$
\begin{array}{l}
\texttt{FOR } n = 1, 2, \ldots \\
\quad x := (u_{n-1} + v_{n-1})/2 \\
\quad \texttt{IF } f(x) = 0 \texttt{ THEN RETURN} \\
\quad \texttt{IF } (f(x) \cdot f(v_{n-1}) < 0) \texttt{ THEN} \\
\qquad u_n := x; \quad v_n := v_{n-1}; \\
\quad \texttt{ELSE} \\
\qquad u_n := u_{n-1}; \quad v_n := x;
\end{array}
$$

OUTPUT: x mit $f(x) = 0$, Nullstelle von f in $[a, b]$.

Beispiel. $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - 2$, $a = 1$ und $b = 2$.

Beachte: $f(\sqrt{2}) = 0$, d.h. $\sqrt{2} = 1.4142\,13562\ldots$ ist Nullstelle von f.

n	u_n	v_n
0	1.0000 00000	2.0000 00000
1	1.0000 00000	1.5000 00000
2	1.2500 00000	1.5000 00000
3	1.3750 00000	1.5000 00000
10	1.4140 62500	1.4150 39063
20	1.4142 13181	1.4142 14134
30	1.4142 13562	1.4142 13562



Graph von $f(x) = x^2 - 2$**.**

Beobachtung: Das Bisektionsverfahren konvergiert relativ langsam!

Das Newton-Verfahren.

- **Ziel:** Bestimme eine Nullstelle einer *differenzierbaren* Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
- **Verwende** `Newton-Iteration`**:**

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad \text{für } f'(x_n) \neq 0,$$

mit Startwert x_0.

Bemerkung: Verfahren *konvergiert*, falls x_0 nahe bei einer Nullstelle von f liegt.

Beispiel: Für $f(x) = x^2 - 2$ und $x_0 = 1$ erhält man

n	0	1	2	3	4	$\cdots$
t_n	1.0000	1.5000	1.4166 66667	1.4142 15686	1.4142 13562	$\cdots$

Erinnerung: $f(\sqrt{2}) = 0$, d.h. $\sqrt{2} = 1.4142\,13562\ldots$ ist Nullstelle von f.

Konvergenz von Folgen.

Definition: *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in einem normierten Vektorraum* V. *Dann heißt*

- $(a_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ *für* $n_j \in \mathbb{N}$ *mit* $1 \le n_1 < n_2 < \ldots$ *eine* Teilfolge *von* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- *die Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, *falls es ein* $C > 0$ *gibt mit*

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \|a_n\| \le C.$$

- *die Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent *mit* Grenzwert *(*Limes*)* $a \in V$, *falls*

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall\, n \ge N : \|a_n - a\| < \varepsilon.$$

  Eine nicht-konvergente Folge heißt divergent.

- *die Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge, *falls*

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall\, n, m \ge N : \|a_n - a_m\| < \varepsilon.$$

$\square$

Satz: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem normierten Vektorraum. Dann gilt:

(a) (a_n) konvergent $\Longrightarrow$ (a_n) beschränkt;

(b) (a_n) konvergent $\Longrightarrow$ (a_n) Cauchy-Folge;

(c) Falls (a_n) konvergiert, so ist der Grenzwert von (a_n) eindeutig bestimmt.

Beweis von (a): Sei (a_n) konvergent mit Grenzwert a. Dann gilt für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ die *Abschätzung*

$$\|a_n\| = \|a_n - a + a\| \leq \|a_n - a\| + \|a\| < \varepsilon + \|a\| \qquad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon).$$

Damit ist die Folge (a_n) beschränkt mit der Konstanten

$$C = \max\{\|a_1\|, \|a_2\|, \dots, \|a_{N-1}\|, \|a\| + \varepsilon\}.$$

Also

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \|a_n\| \leq C.$$

$\square$

Beweis von (b): Sei (a_n) konvergent mit Grenzwert a. Dann gilt für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ die *Abschätzung*

$$\begin{aligned} \|a_n - a_m\| &= \|a_n - a + a - a_m\| \\ &\leq \|a_n - a\| + \|a_m - a\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $n, m \geq N = N(\varepsilon/2)$ □

Beweis von (c): Sei (a_n) konvergent mit *verschiedenen* Grenzwerten a und $\overline{a}$. Dann gelten für $\varepsilon > 0$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|a_n - a\| < \varepsilon \quad &\text{für alle } n \geq N(\varepsilon) \\ \|a_n - \overline{a}\| < \varepsilon \quad &\text{für alle } n \geq \overline{N}(\varepsilon) \end{aligned}$$

Somit folgt für $n \geq \max\{N, \overline{N}\}$ die Ungleichung

$$\|a - \overline{a}\| = \|a - a_n + a_n - \overline{a}\| \leq \|a_n - a\| + \|a_n - \overline{a}\| < 2\varepsilon.$$

Da dies für *jedes* $\varepsilon > 0$ gilt, folgt $a = \overline{a}$ im Widerspruch zur Annahme $a \neq \overline{a}$. ■

Notationen.

Für eine konvergente Folge (a_n) mit Grenzwert a schreiben wir

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{oder} \qquad a_n \to a \quad (n \to \infty).$$

Uneigentliche Konvergenz ...

... bzw. Divergenz gegen den uneigentlichen Grenzwert $\pm\infty$.

Für *reelle* Folgen definieren wir zusätzlich

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, C > 0 : \exists\, N \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq N : a_n > C$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, C > 0 : \exists\, N \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq N : a_n < -C$$

□

Satz: *Seien* (a_n) *und* (b_n) *zwei konvergente Folgen. Dann konvergieren die beiden Folgen* $(a_n + b_n)$ *und* (λa_n) *für* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(bzw.* $\lambda \in \mathbb{C}$*), wobei gilt*

(a) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$,

(b) $\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n$.

Beweis: Sei $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim_{n\to\infty} b_n$, d.h. a sei Grenzwert von (a_n) und b sei Grenzwert von (b_n).

(a): Für $n \geq \max\{N_1(\varepsilon/2), N_2(\varepsilon/2)\}$ gilt

$$\|(a_n + b_n) - (a + b)\| \leq \|a_n - a\| + \|b_n - b\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(b): Sei $\lambda \neq 0$. Dann gilt für $n \geq N_1(\varepsilon/|\lambda|)$ die Abschätzung

$$\|\lambda a_n - \lambda a\| = |\lambda| \cdot \|a_n - a\| < |\lambda| \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$$

Der Fall $\lambda = 0$ ist *trivial*. ■

Konvergenzgeschwindigkeit.

Definition: *Sei* (a_n) *eine konvergente Folge mit Grenzwert* a.

(a) Die Folge (a_n) *heißt (mindestens)* `linear konvergent`, *falls eine Konstante* $0 < C < 1$ *und ein Index* $N \in \mathbb{N}$ *existiert mit*

$$\forall\, n \geq N : \|a_{n+1} - a\| \leq C\|a_n - a\|$$

(b) Die Folge (a_n) *heißt (mindestens)* `superlinear konvergent`, *falls es eine nicht-negative Nullfolge* $C_n \geq 0$ *gibt mit* $\lim_{n\to\infty} C_n = 0$, *so dass*

$$\forall\, n : \|a_{n+1} - a\| \leq C_n\|a_n - a\|$$

(c) Die Folge (a_n) *heißt* `konvergent` *der* `Ordnung` *(mindestens)* $p > 1$, *falls es eine nicht-negative Konstante* $C \geq 0$ *gibt mit*

$$\forall\, n : \|a_{n+1} - a\| \leq C\|a_n - a\|^p.$$

□

4 Konvergenzkriterien für Folgen und Reihen

4.1 Konvergenzkriterien für reelle Folgen

Definition: *Eine reelle Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt*

$$\begin{aligned}
\texttt{monoton wachsend} &\iff \forall n < m : a_n \le a_m \\
\texttt{streng monoton wachsend} &\iff \forall n < m : a_n < a_m \\
\texttt{nach oben beschränkt} &\iff \exists C \in \mathbb{R} : \forall n : a_n \le C
\end{aligned}$$

Analog definiert man die Begriffe

$$\begin{aligned}
\texttt{monoton fallend} &\iff \forall n < m : a_n \ge a_m \\
\texttt{streng monoton fallend} &\iff \forall n < m : a_n > a_m \\
\texttt{nach unten beschränkt} &\iff \exists C \in \mathbb{R} : \forall n : a_n \ge C
\end{aligned}$$

□

Satz: *Eine monoton wachsende, nach oben beschränkte reelle Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist konvergent mit Grenzwert*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt. Dann gilt

$$s = \sup\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $N = N(\varepsilon)$ mit

$$s - \varepsilon < a_N \le s$$

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend, also folgt

$$s - \varepsilon < a_N \le a_n \le s \quad \forall\, n \ge N,$$

d.h.

$$|s - a_n| < \varepsilon \quad \forall\, n \ge N \equiv N(\varepsilon)$$

■

Folgerung (Prinzip der Intervallschachtelung):
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine monoton wachsende reelle Folge und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine monoton fallende reelle Folge mit*

$$a_n \leq b_n \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann sind **beide** *Folgen konvergent. Gilt weiterhin*

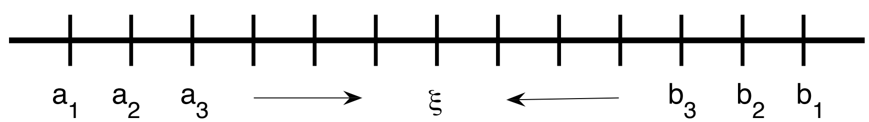
$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0,$$

so haben $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *denselben Grenzwert, d.h. es gibt ein* $\xi \in \mathbb{R}$ *mit*

$$\xi = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Weiterhin gelten in diesem Fall die Fehlerabschätzungen

$$|a_n - \xi| \leq |b_n - a_n| \qquad \text{und} \qquad |b_n - \xi| \leq |b_n - a_n|.$$



□

Beispiel.

Definiere für $0 < a < b$ zwei Folgen (a_n) und (b_n) *rekursiv* durch

$$\begin{aligned} a_0 &:= a & b_0 &:= b \\ a_{n+1} &:= \sqrt{a_n b_n} & b_{n+1} &:= (a_n + b_n)/2 \quad \text{für } n \geq 0. \end{aligned}$$

Die Folgen (a_n) und (b_n) bilden *Intervallschachtelung*, und es gilt

$$(b_{n+1} - a_{n+1}) \leq \frac{b_n - a_n}{2}$$

Der gemeinsame Grenzwert von (a_n) und (b_n)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

heißt `arithmetisch-geometrisches Mittel` von a und b. □

Die Bernoullische Ungleichung.

Es gilt

$$\forall\, x \geq -1,\; n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1 + nx,$$

wobei Gleichheit nur für $n = 1$ oder $x = 0$ gilt.

Beweis: vollständige Induktion.

Die Geometrische Folge.

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reelle Folge mit $a_n := q^n$ für $q \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
q > 1 \quad &: \quad \lim_{n\to\infty} q^n = +\infty \quad (q^n = (1+(q-1))^n \geq 1 + n(q-1)) \\
q = 1 \quad &: \quad \lim_{n\to\infty} q^n = 1 \\
0 < q < 1 \quad &: \quad \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad \left(q^n = \tfrac{1}{(1+(1/q-1))^n} \leq \tfrac{1}{1+n(1/q-1)}\right) \\
-1 < q \leq 0 \quad &: \quad \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad (|q^n| = |q|^n) \\
q = -1 \quad &: \quad (q^n) \text{ beschränkt, aber nicht konvergent} \quad (q^n \in \{-1, 1\}) \\
q < -1 \quad &: \quad (q^n) \text{ divergent, kein uneigentlicher Grenzwert}
\end{aligned}$$

Weitere Rechenregeln.

Satz: *Seien* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergente reelle Folgen. Dann gilt*

(a) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n)$

(b) $\forall\, n : b_n \neq 0 \wedge \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$

(c) $\forall\, n : a_n \geq 0 \wedge m \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim_{n\to\infty} a_n}$

Beweis: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

Beweis von (a): Für $\varepsilon > 0$ und $n \geq N \equiv N(\varepsilon)$ gilt

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\ &\leq |a_n| \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| \\ &\leq C_a \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| \\ &< (C_a + |b|)\varepsilon \end{aligned}$$

Beweis von (b): Da $b_n \neq 0$ und $b \neq 0$ existiert eine Konstante $C_b > 0$ mit

$$C_b \leq |b_n| \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Damit gilt

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - b_n}{b_n b} \right| = \frac{1}{|b_n| \cdot |b|} \cdot |b_n - b| < \frac{1}{C_b \cdot |b|} \cdot \varepsilon$$

für hinreichend große $n \geq N \equiv N(\varepsilon)$.

Nun folgt die Aussage in Teil (b) direkt aus Teil (a), denn es gilt $1/b_n \to 1/b$.

Beweis von (c): Wir setzen hierzu folgenden Satz voraus.

Satz: Zu $a > 0$ und $m \in \mathbb{N}$ existiert genau eine Zahl $w > 0$ mit $w^m = a$. Diese Zahl wird mit $w = \sqrt[m]{a}$ bezeichnet.

Fall 1: Sei (a_n) eine Nullfolge und $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

$$a_n < \varepsilon^m \quad \forall\, n \geq N(\varepsilon^m)$$

Daraus folgt

$$0 \leq \sqrt[m]{a_n} < \varepsilon$$

und daher $\sqrt[m]{a_n} \to 0$ für $n \to \infty$.

Fall 2: Sei $a > 0$. Verwende die Identität

$$
\begin{aligned}
(x-y)\sum_{j=1}^{m} x^{m-j}y^{j-1} &= (x-y)\cdot\left(x^{m-1}y^0 + x^{m-2}y^1 + \ldots + x^0y^{m-1}\right)\\
&= x^m y^0 + \underbrace{x^{m-1}y^1 + \ldots + x^1y^{m-1} - x^{m-1}y^1 - \ldots - x^1y^{m-1}}_{=0} - x^0y^m\\
&= x^m - y^m
\end{aligned}
$$

Setze nun $x = \sqrt[m]{a_n}$ und $y = \sqrt[m]{a}$. Dann folgt für $\varepsilon > 0$ und $n \geq N(\varepsilon)$:

$$
\begin{aligned}
\left|\sqrt[m]{a_n} - \sqrt[m]{a}\right| &= \frac{|a_n - a|}{\left|(\sqrt[m]{a_n})^{m-1} + \ldots + (\sqrt[m]{a})^{m-1}\right|}\\
&\leq \frac{|a_n - a|}{(\sqrt[m]{a})^{m-1}}\\
&< C\cdot\varepsilon \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Beispiel.

Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \sqrt{n^2+5n+1} - n$$

Es gilt

$$(n^2+5n+1) - n^2 = \left(\sqrt{n^2+5n+1} - n\right)\left(\sqrt{n^2+5n+1} + n\right),$$

woraus folgt

$$a_n = \frac{(n^2+5n+1)-n^2}{\sqrt{n^2+5n+1}+n} = \frac{5n+1}{\sqrt{n^2+5n+1}+n} = \frac{5+\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+1}$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{5+0}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{5}{2}.$$

$\square$

Der Satz von Bolzano-Weierstraß.

Satz (Bolzano-Weierstraß)**:**
Jede reelle beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle beschränkte Folge. Dann gibt es ein Intervall $[A, B]$ mit $\forall n : a_n \in [A, B]$. Betrachte nun die folgende Bisektionsmethode.

```
A_1 := A;
B_1 := B;
FOR k = 1, 2, 3, ...
    C := (A_k + B_k)/2
    IF {n | a_n ∈ [A_k, C]} unendlich THEN
        A_{k+1} := A_k;    B_{k+1} := C;
    ELSE
        A_{k+1} := C;    B_{k+1} := B_k;
```

Beobachtung: Die Folgen (A_k) und (B_k) bilden eine Intervallschachtelung, d.h. $\forall\, k : A_k \leq B_k$, und es gibt einen gemeinsamen Grenzwert

$$\xi = \lim_{k\to\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} B_k.$$

Definiere nun eine Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) wie folgt.

- Setze $n_1 := 1$;
- FOR $k = 2, 3, 4, \ldots$

  wähle $n_k > n_{k-1}$ mit $a_{n_k} \in [A_k, B_k]$.

Wegen

$$A_k \leq a_{n_k} \leq B_k, \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N},$$

gilt dann $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \xi$. ■

Definition: *Sei $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann wird der Grenzwert der Teilfolge $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ als* Häufungspunkte *der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet.* □

Das Cauchysche Konvergenzkriterium.

Satz: *Der Körper* $\mathbb{R}$ *ist* vollständig, *d.h. jede reelle Cauchyfolge konvergiert.*

Beweis: Zeige, dass jede Cauchyfolge beschränkt ist: Für n und $N = N(\epsilon)$ gilt

$$|a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < \varepsilon + |a_N|$$

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt (a_n) einen Häufungspunkt ξ. Dann gilt für $m, n_k \geq N(\varepsilon/2)$:

$$\begin{aligned} |a_m - \xi| &= |a_m - a_{n_k} + a_{n_k} - \xi| \\ &\leq \underbrace{|a_m - a_{n_k}|}_{\text{Cauchyfolge}} + \underbrace{|a_{n_k} - \xi|}_{\text{Häufungspunkt}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

■

Notation:

$\liminf a_n$ = kleinster Häufungspunkt, $\limsup a_n$ = größter Häufungspunkt.

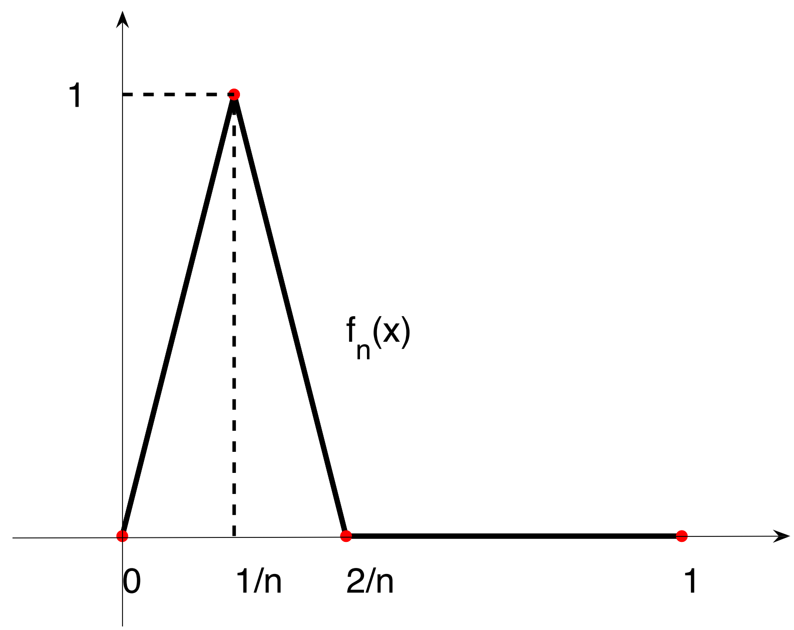
4.2 Konvergenz in normierten Vektorräumen

Beispiel. Betrachte den Vektorraum $C[0,1]$ aller stetigen Funktionen auf $[0,1]$.

Für jedes $n \geq 2$ liegt die Funktion

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{für } x \in [0, 1/n]; \\ 2 - nx & \text{für } x \in [1/n, 2/n]; \\ 0 & \text{für } x \in [2/n, 1]; \end{cases}$$

in $C[0,1]$, d.h. $f_n \in C[0,1]$ für alle $n \geq 2$.



Der Graph von $f_n(x)$.

Beobachtung: $\{f_n\}_{n\geq 2}$ bildet eine Folge von Funktionen in $C[0,1]$.

Wie sieht es mit der Konvergenz von f_n in $C[0,1]$ aus?

Fall 1. Verwende die Euklidische Norm $\|\cdot\|_2$. Dann gilt

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^{1/n} |nx|^2\,dx + \int_{1/n}^{2/n} |2-nx|^2\,dx + \int_{2/n}^{1} 0\,dx = \ldots = \frac{2}{3n}$$

und somit $\|f_n\|_2 \leq 1/\sqrt{n}$ für $n \geq 2$. Die Folge $\{f_n\}_{n\geq 2}$ ist somit bezüglich der Euklidischen Norm eine Nullfolge in $C[0,1]$, d.h. $\{f_n\}_{n\geq 2}$ konvergiert gegen Null.

Fall 2. Verwende die Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$. Dann gilt

$$\|f_n\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = 1, \qquad \text{für alle } n \geq 2,$$

und es gibt *keine* stetige Funktion $f \in C[0,1]$ mit $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ für $n \to \infty$.

Somit divergiert die Folge $\{f_n\}_{n\geq 2}$ in $C[0,1]$ bezüglich der Maximumnorm.

Fazit: Die Konvergenz einer Folge $(a_n)_n$ ist im Allgemeinen nicht nur abhängig vom zugrunde liegenden Vektorraum V, sondern auch (und vor allem!) von der verwendeten Norm $\|\cdot\|$. □

Konvergenz in endlichdimensionalen Vektorräumen.

Bemerkung: In endlichdimensionalen Vektorräumen ist die Konvergenz (und der Grenzwert) einer Folge jedoch lediglich von dem jeweiligen Vektorraum abhängig, nicht von der zugrunde liegenden Norm.

Satz (Normäquivalenzsatz): *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum, und seien $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ zwei Normen auf V. Dann gibt es Konstanten $C, C' > 0$ mit*

$$C\|v\| \leq \|v\|' \leq C'\|v\|, \qquad \text{für alle } v \in V,$$

d.h. die beiden Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ sind äquivalent auf V. □

Fazit: Eine Folge (a_n), die in einem endlichdimensionalen Vektorraum V bezüglich einer Norm $\|\cdot\|$ in V gegen einen Grenzwert $a \in V$ konvergiert, konvergiert ebenso bezüglich jeder anderen Norm $\|\cdot\|'$ in V gegen a. □

- **Beispiele für endlichdimensionale Vektorräume:** $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$.
- **Beispiel für einen unendlichdimensionalen Vektorraum:** $C[a, b]$.

Konvergenz von Folgen im $\mathbb{R}^n$.

Folgerung: *Eine Folge* $(\mathbf{x}_m)$ *im* $\mathbb{R}^n$ *konvergiert genau dann, wenn alle* n *Koordinatenfolgen* $(x_j^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$, $j = 1, \ldots, n$, *in* $\mathbb{R}$ *konvergieren. Der Grenzwert der Folge* $(\mathbf{x}_m)$ *lässt sich komponentenweise berechnen.*

Beweis: $\mathbf{x}_m \longrightarrow \mathbf{x}$ ist äquivalent zu

$$\|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}\|_\infty \to 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall 1 \leq j \leq n : |x_j^{(m)} - x_j| \to 0, \quad m \to \infty,$$

und somit $x_j^{(m)} \longrightarrow x_j$, $m \to \infty$, für alle $j = 1, \ldots, n$. ■

Beispiel: Für die Folge $(\mathbf{x}_m)$, gegeben durch

$$\mathbf{x}_m = \left(\frac{1}{m}, 1 + \exp\left(\frac{1}{m}\right), \frac{m^2 + 2m + 3}{2m^2 - 1}\right)^T \in \mathbb{R}^3 \quad \text{für } m \in \mathbb{N}.$$

gilt

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{x}_m = (0, 2, 1/2)^T \in \mathbb{R}^3.$$

□

Konvergenz in endlichdimensionalen Vektorräumen.

Folgerung: In endlichdimensionalen Vektorräumen gilt

- das Cauchysche Konvergenzkriterium:

$$\exists\, \mathbf{a} \;:\; \mathbf{a}_m \to \mathbf{a}\ (m \to \infty)$$
$$\iff \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \equiv N(\varepsilon) \;:\; m, n \geq N \;:\; \|\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_n\| < \varepsilon$$

- der Satz von Bolzano-Weierstraß:
  Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beispiel: Für $a_n := z^n$, $z \in \mathbb{C}$ gegeben, gilt

$$|z| > 1 \quad \Longrightarrow \quad |a_n| = |z|^n \text{ unbeschränkt } \Longrightarrow (a_n) \text{ divergent;}$$
$$|z| < 1 \quad \Longrightarrow \quad |a_n| = |z|^n \to 0\ (n \to \infty) \quad \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} z^n = 0.$$

□

4.3 Konvergenzkriterien für Reihen

Definition: *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $a_n \in \mathbb{R}$ *(oder* $a_n \in \mathbb{C}$*), eine reelle (komplexe) Folge. Dann heißt die Folge* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, *definiert durch*

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}_0,$$

eine Reihe *in* $\mathbb{R}$ *(bzw. in* $\mathbb{C}$*). Die Folgeglieder* s_n *der Reihe* (s_n) *werden als* Partialsummen *bezeichnet. Falls die Folge* (s_n) *der Partialsummen konvergiert, d.h. die Reihe konvergiert, mit einem Grenzwert* s, *d.h.* $s_n \to s$ $(n \to \infty)$, *so schreibt man*

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

für den Grenzwert *der Reihe* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. □

Einige Konvergenzkriterien für Reihen.

Satz (Unmittelbare Konvergenzkriterien für Reihen):

(a) Es gilt das Cauchysche Konvergenzkriterium

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \textit{ konvergent} \iff \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N : m, n \geq N : \left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon$$

(b) Es gilt die notwendige Bedingung

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \textit{ konvergent} \implies \lim_{k \to \infty} a_k = 0$$

Beweis:

- Teil (a) folgt unmittelbar aus dem Cauchy-Kriterium für Folgen.
- Teil (b) folgt aus Teil (a) für den Spezialfall $m = n$. ■

Satz (Weitere unmittelbare Konvergenzkriterien für Reihen)**:**

(c) Seien $\sum a_k$, $\sum b_k$ *konvergente Reihen. Dann konvergieren die Reihen* $\sum(a_k + b_k)$ *und* $\sum(\lambda a_k)$, *und es gilt*

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \\ \sum_{k=0}^{\infty}(\lambda a_k) &= \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k \end{aligned}$$

(d) Es gilt das Leibnizsches Konvergenzkriterium*: Eine* alternierende Reihe *der Form* $\sum(-1)^k a_k$, $a_k \geq 0$, *deren (nicht-negativen) Folgeglieder* a_k *eine monoton fallende Nullfolge bilden, konvergiert, und es gilt*

$$\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k \leq \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k$$

Beweis: Teil (c) folgt direkt aus der Linearität der Grenzwertbildung für Folgen.

Zu Teil (d): Für die Reihen

$$u_n := \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k a_k \quad \text{und} \quad v_n := \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k$$

gilt

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + (a_{2n} - a_{2n+1}) \geq u_n \\ v_{n+1} &= v_n - (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \leq v_n \\ v_n &= u_n + a_{2n} \geq u_n \\ v_n - u_n &= a_{2n} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

Somit bilden die Folgen (u_n), (v_n) eine Intervallschachtelung, konvergieren gegen einen gemeinsamen Grenzwert, und es gilt

$$u_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \leq v_n. \qquad \blacksquare$$

Die geometrische Reihe.

Beispiel: Für $x, y \in \mathbb{C}$ gilt

$$x^m - y^m = (x-y)\sum_{j=1}^{m} x^{m-j}y^{j-1}.$$

Insbesondere mit $m = n+1$, $x = 1$ und $y = q \in \mathbb{C}$ gilt

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

für die Partialsummen der geometrischen Reihe $\sum q^k$. Daraus folgt, dass

- die geometrische Reihe für $|q| < 1$ konvergiert mit Grenzwert

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

- die geometrische Reihe für $|q| > 1$ divergiert. ■

Die harmonische Reihe.

Beispiel: Die harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

divergiert, denn es gilt

$$\sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{m} = \frac{1}{m} \sum_{k=n}^{m} 1 = \frac{m-n+1}{m} \longrightarrow 1 \quad (m \to \infty)$$

und somit ist das Cauchy-Kriterium

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists N : m, n \geq N : \left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon$$

für $\varepsilon < 1$ verletzt. ■

Die alternierende harmonische Reihe.

Beispiel: Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

konvergiert nach dem Leibnizschen Konvergenzkriterium, und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} = \ln(2) = 0.69314 \ldots$$

für den Grenzwert der alternierenden harmonischen Reihe. □

Absolute Konvergenz von Reihen.

Definition: *Eine Reihe* $\sum a_k$ *heißt* absolut konvergent, *falls die Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

konvergiert. □

Beispiel: Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

ist konvergent, aber **nicht** absolut konvergent, denn es gilt $a_k = (-1)^k \frac{1}{k+1}$ und

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| (-1)^k \frac{1}{k+1} \right| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

ist die harmonische Reihe, die **nicht** konvergiert. □

Kriterien für absolute Konvergenz von Reihen.

Satz: *Sei* $\sum_k a_k$ *eine Reihe. Dann gelten die folgenden Konvergenzkriterien.*

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent* $\iff$ $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|\right)_{n\geq 0}$ *beschränkt;*

(b) Majorantenkriterium:

$$|a_k| \leq b_k \;\wedge\; \sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \quad\Longrightarrow\quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent;}$$

(c) Quotientenkriterium: *Sei* $a_k \neq 0$ *(*$\forall\, k \geq k_0$*).*

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q < 1 \quad (\forall\, k \geq k_0) \quad\Longrightarrow\quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent;}$$

(d) Wurzelkriterium:

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1 \quad (\forall\, k \geq k_0) \quad\Longrightarrow\quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent.}$$

Beweis: (a): Die Folge $\left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|\right)_{n \geq 0}$ ist monoton wachsend und daher genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.

(b): Mit $|a_k| \leq b_k$ gilt $b_k \geq 0$ für alle k. Somit ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sogar absolut konvergent. Nach Teil (a) ist die Folge $\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)_{n \geq 0}$ beschränkt. Mit

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{n} b_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$$

folgt, dass $\left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|\right)$ beschränkt und somit nach (a) absolut konvergent ist.

(c): Aus $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q \ (\forall\, k \geq k_0)$ folgt $|a_k| \leq q^{k-k_0} |a_{k_0}|$ per Induktion. Somit:

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{k_0-1} |a_k| + |a_{k_0}| \sum_{j=0}^{n-k_0} q^j \leq \sum_{k=0}^{k_0-1} |a_k| + |a_{k_0}| \frac{1}{1-q} < \infty$$

für alle n. Nach Teil (a) ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

(d): Aus $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q$ $(k \geq k_0)$ folgt direkt $|a_k| \leq q^k$ für alle $k \geq k_0$. Somit:

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{k_0-1} |a_k| + \frac{q^{k_0}}{1-q} < \infty \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{absolut konvergent.}$$

■

Bemerkung:

- Das Quotienten- bzw. das Wurzelkriterium ist erfüllt, falls gilt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$$

- Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist dagegen divergent, falls gilt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1.$$

□

Beispiel. Wir untersuchen die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

Es gilt

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$$

und daher

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Daraus folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Die Reihe ist somit (absolut) konvergent. □

Beispiel. Wir untersuchen die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r} \qquad (r \in \mathbb{N}, r \geq 2)$$

Nach dem letzten Beispiel gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^r} \quad &\leq \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \\
&< \quad 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} < 2
\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist die Reihe (absolut) konvergent. □

Einige Grenzwerte (ohne Beweis):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

□

Beispiel. Wir untersuchen die Konvergenz der Exponentialreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

Anwendung des Quotientenkriteriums ergibt

$$\left| \frac{\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{z^k}{k!}} \right| = \left| \frac{z^{k+1}\, k!}{z^k\, (k+1)!} \right| = \frac{|z|}{k+1} \quad \longrightarrow \quad 0 \quad (k \to \infty)$$

Damit konvergiert die Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$ (absolut).

Wir setzen

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

$\square$

Der Umordnungssatz für Reihen.

Sei $\sigma : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ eine beliebige Bijektion (Permutation) auf $\mathbb{N}_0$.

Ziel: Vergleiche die beiden Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k} \qquad (\sigma_k = \sigma(k))$$

Satz: *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe, und sei $\sigma : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ eine beliebige Permutation auf $\mathbb{N}_0$. Dann ist die umgeordnete Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k}$ ebenfalls absolut konvergent, und die Grenzwerte der beiden Reihen stimmen überein, d.h. es gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k}.$$

Beweis: Für $m \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{k=0}^{m} |a_{\sigma_k}| \leq \sum_{k=0}^{N} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|,$$

wobei $N \in \mathbb{N}_0$ so groß gewählt sei, dass $\{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_m\} \subset \{0, 1, \ldots, N\}$.

Somit ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k}$ absolut konvergent und es gilt

$$S' := \sum_{k=0}^{\infty} |a_{\sigma_k}| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| =: S.$$

Nun ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Umordnung der (absolut konvergenten) Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k}$, und somit gilt ebenso $S \leq S'$. Insgesamt bekommt man $S = S'$.

Wendet man dies auf die absolut konvergente Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(|a_k| + a_k)$ an, so bekommt man

$$S + \sum_{k=0}^{\infty} a_k = S' + \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k}$$

woraus die Behauptung $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k}$ folgt. ∎

Multiplikation von Reihen.

Frage: Wie funktioniert das "Ausmultiplizieren" von Reihen?

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell\right) = ???$$

Produkt von endlichen Summen. Für *endliche* Summen gilt

$$(a_0 + \ldots + a_m) \cdot (b_0 + \ldots + b_n) = \sum_{k=0}^{m} a_k \left(\sum_{\ell=0}^{n} b_\ell\right) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{\ell=0}^{n} a_k b_\ell.$$

Frage: Gilt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell\right) \stackrel{?}{=} \sum_{k,\ell=0}^{\infty} a_k b_\ell.$$

Beachte:

Jedes Indexpaar $(k,\ell) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ auf der rechten Seite tritt *genau* einmal auf.

Satz: *Die Reihen* $\sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell$ *und* $\sum_{m=0}^{\infty} b_m$ *seien absolut konvergent. Weiterhin sei* $\sigma : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, $k \mapsto (\sigma_1(k), \sigma_2(k))$ *für* $k \in \mathbb{N}_0$, *eine bijektive Abbildung. Dann ist die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)}$ *absolut konvergent und es gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)} = \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m \right).$$

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}_0$ und für hinreichend großes $N \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} |a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)}| \leq \sum_{\ell=0}^{N} \sum_{m=0}^{N} |a_\ell| \, |b_m| \leq \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} |a_\ell| \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} |b_m| \right) < \infty.$$

Somit ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)}$ absolut konvergent, und ihr Grenzwert ist nach dem Umordnungssatz unabhängig von der Permutation $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$.

Zur Berechnung des Grenzwertes wählt man eine spezielle Reihenfolge

$\sigma(k)$	0	1	2	3	$\ldots$
0	0	3	8	15	$\ldots$
1	1	2	7	14	$\ldots$
2	4	5	6	13	$\ldots$
3	9	10	11	12	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Für $N = (n+1)^2 - 1$, mit $n \in \mathbb{N}_0$, bekommt man

$$\sum_{k=0}^{N} a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)} = (a_0 + a_1 + \ldots + a_n)(b_0 + b_1 + \ldots + b_n),$$

und somit

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)} = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell\right)\left(\sum_{m=0}^{n} b_m\right) = \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m\right).$$

Das Cauchy-Produkt von Reihen.

Weiterer Spezialfall: Nummerierung entlang der Diagonalen

$\sigma(k)$	0	1	2	3	...
0	0	2	5	9	...
1	1	4	8	13	...
2	3	7	12	18	...
3	6	11	17	24	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Man erhält damit das Cauchy-Produkt der (absolut konvergenten) Reihen:

$$\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)$$
$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \ldots$$

Anwendung des Cauchy-Produkts.

Für die Exponentialfunktion

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad (z \in \mathbb{C})$$

gilt die Funktionalgleichung

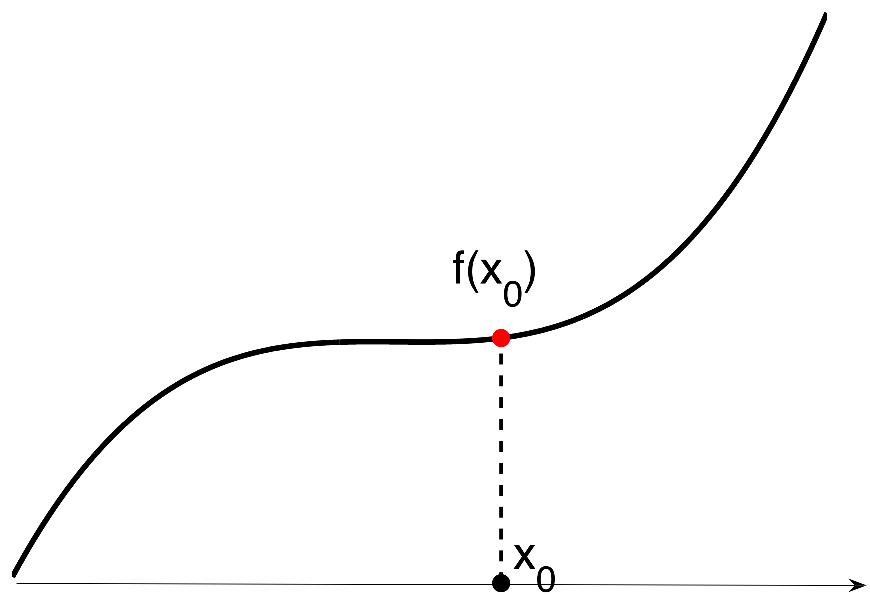
$$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$$

Begründung: Die obige Reihe $\exp(z)$, $z \in \mathbb{C}$, ist absolut konvergent. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\exp(z)\exp(w) &= \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{z^\ell}{\ell!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m}{m!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+w)^n = \exp(z+w). \qquad \square
\end{aligned}$$

5 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

5.1 Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen



Graph einer stetigen Funktion.

Häufungspunkt und Abschluss.

Im Folgenden betrachten wir für normierte Vektorräume V und W Funktionen $f : D \to W$ mit Definitionsbereich $D \subset V$.

Definition:

- *Ein Punkt* $x_0 \in V$ *heißt* Häufungspunkt *von* D, *falls eine Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *existiert mit*

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad : \quad x_n \in D, \;\; x_n \neq x_0, \;\; \lim_{n\to\infty} x_n = x_0;$$

- D' *bezeichnet die* Menge aller Häufungspunkte *von* D;
- $\overline{D} = D \cup D'$ *bezeichnet den* topologischen Abschluss *von* D;
- *Die Menge* D *heißt* abgeschlossen, *falls* $D' \subset D$, *also* $\overline{D} = D$ *gilt.* □

Definition:

- *Zu* $x_0 \in V$ *und* $\varepsilon > 0$ *bezeichnet*

$$K_\varepsilon(x_0) := \{x \in V \mid \|x - x_0\| < \varepsilon\}$$

die (offene) Kugel *um* x_0 *mit Radius* ε*. Die Menge*

$$\overline{K_\varepsilon(x_0)} = \{x \in V \mid \|x - x_0\| \leq \varepsilon\};$$

heißt abgeschlossene Kugel *um* x_0 *mit Radius* ε*.*

- $D \subset V$ *heißt* beschränkt*, falls es* $\varepsilon > 0$ *und* $x_0 \in V$ *gibt mit* $D \subset K_\varepsilon(x_0)$*;*
- $x_0 \in D$ *heißt* innerer Punkt *von* D*, falls es* $\varepsilon > 0$ *gibt mit* $K_\varepsilon(x_0) \subset D$*;*
- D^0 *bezeichnet die* Menge aller inneren Punkte *von* D*,*
  kurz: das Innere *von* D*;*
- D *heißt* offen*, falls* $D^0 = D$*.* □

Beispiele.

- Das offene Einheitsintervall $D = (0,1)$ ist offen und beschränkt. Es gilt $\{0,1\} \notin D$, aber $\{0,1\} \in D'$. Somit $\overline{D} = [0,1]$.
- Das Einheitsintervall $D = [0,1]$ ist abgeschlossen und beschränkt.
- Die Menge $D = [0,\infty) \subset \mathbb{R}$ ist abgeschlossen, aber nicht beschränkt.
- Für $D = (-\infty,0) \cup \{1\} \cup (2,\infty)$ gilt

$$\begin{aligned} D' &= (-\infty,0] \cup [2,\infty) \\ \overline{D} &= (-\infty,0] \cup \{1\} \cup [2,\infty) \\ D^0 &= (-\infty,0) \cup (2,\infty) \end{aligned}$$

- Für $x_0 \in V$ ist die Menge $D = K_\varepsilon(x_0) \subset V$ offen, und es gilt $D' = \overline{K}_\varepsilon(x_0)$.
- Innere Punkte $x_0 \in D^0$ sind stets Häufungspunkte von D, denn es gilt

$$x_0 + \frac{\varepsilon}{n+1} \frac{z}{\|z\|} \longrightarrow x_0 \quad (n \to \infty) \qquad \text{für } z \in V \setminus \{0\}.$$

Definition: *Gegeben sei eine Funktion* $f : D \to W$, $D \subset V$, *und ein* $x_0 \in D'$.

- $f(x)$ konvergiert *für* $x \to x_0$ *gegen den Grenzwert* y_0, *falls für jede Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *mit* $x_n \in D$ *und* $x_n \neq x_0$, *gilt*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$$

Man verwendet in diesem Fall die Notation

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0.$$

- *Im Fall* $D = \mathbb{R}$ *lassen sich* einseitige *Grenzwerte wie folgt definieren.*

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = y_0 \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in D,\ x_n < x_0 :$$
$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = y_0 \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in D,\ x_n > x_0 :$$
$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0. \qquad \square$$

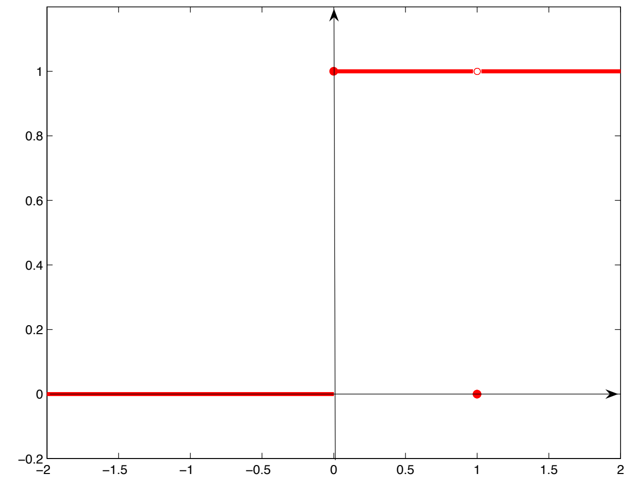
Beispiel. Betrachte die *Sprungfunktion* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \text{ oder } x = 1; \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $x \longrightarrow 0$ existiert der Grenzwert von f nicht!

Weiterhin gilt

$$\lim_{x \longrightarrow 1} f(x) = 1 \neq f(1).$$



Graph von $f(x)$.

Beispiel. Für die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = \sin(1/x)$, existiert weder der Grenzwert $\lim_{x \to 0+} f(x)$ noch $\lim_{x \to 0-} f(x)$.

Beispiel. Für die Funktion $f(x) = 1/x$ existieren die beiden einseitigen *uneigentlichen* Grenzwerte

$$\lim_{x \longrightarrow 0+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \longrightarrow 0-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Grenzwertsätze für Funktionen.

Bemerkung: Grenzwertsätze für Folgen übertragen sich auf Funktionen:

- Für den Grenzwert einer Summe von Funktionen gilt

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$

- Für den Grenzwert eines Produkts einer Funktion mit einem Skalar gilt

$$\lim_{x \to x_0} (\lambda \cdot f(x)) = \lambda \cdot \lim_{x \to x_0} f(x)$$

- Für Produkte von reellwertigen (komplexwertigen) Funktionen gilt

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right) \cdot \left(\lim_{x \to x_0} g(x)\right)$$

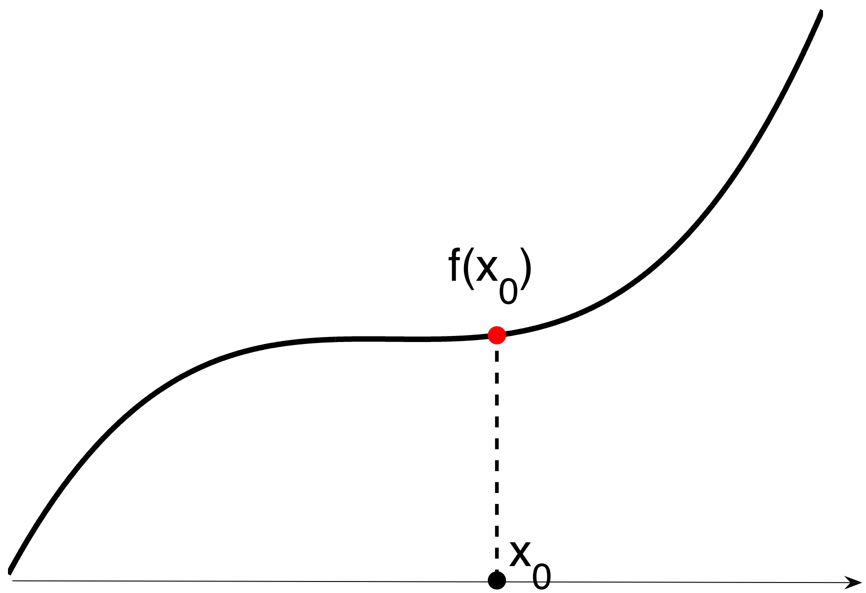
- Für vektorwertige Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ (oder $\mathbb{C}^n$) gilt

$$\lim_{x \to x_0} (f_1(x), \ldots, f_n(x)) = \left(\lim_{x \to x_0} f_1(x), \ldots, \lim_{x \to x_0} f_n(x)\right) \qquad \square$$

Stetige Funktionen.

Definition: *Sei* $f : D \to W$, $D \subset V$, *eine Funktion.*

- $f(x)$ *heißt* stetig ergänzbar *in* $x_0 \in D'$, *falls* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *existiert.*
- $f(x)$ *heißt* stetig *im Punkt* $x_0 \in D \cap D'$, *falls* $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- $f(x)$ *heißt* stetig *auf* D, *falls* $f(x)$ *in allen Punkten* $x_0 \in D \cap D'$ *stetig ist.*



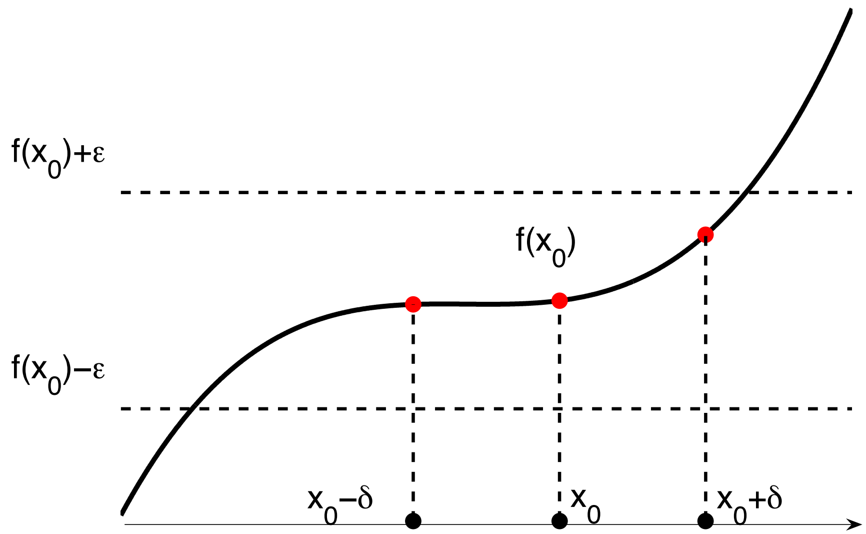
Graph einer stetigen Funktion.

ε-δ-Definition der Stetigkeit.

Satz (ε-δ-Definition der Stetigkeit)**:**
Für $x_0 \in D \cap D'$ *sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

(a) $f(x)$ *ist stetig in* x_0*, d.h.* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$*;*

(b) $\forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, \delta > 0 : \forall\, x \in D : \quad \|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$



Graph einer stetigen Funktion.

Beweis: (a) $\Rightarrow$ (b): **Annahme:** $\exists\, \varepsilon > 0 \; : \; \forall\, \delta > 0 \; : \; \exists\, x_\delta \in D \; :$

$$\|x_\delta - x_0\| < \delta \quad \wedge \quad \|f(x_\delta) - f(x_0)\| \geq \varepsilon$$

Die Wahl $\delta = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ generiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in D$, mit

$$\|x_n - x_0\| < \frac{1}{n} \quad \wedge \quad \|f(x_n) - f(x_0)\| \geq \varepsilon$$

Wegen $\|f(x_n) - f(x_0)\| \geq \varepsilon$ gilt $x_n \neq x_0$ und somit

$$x_n \in D \setminus \{x_0\} \qquad \text{für alle } n.$$

Weiterhin gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Gleichzeitig konvergiert aber $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen $f(x_0)$. Dies steht im Widerspruch zur Annahme, wonach $f(x)$ im Punkt x_0 stetig ist. $\square$

(b) $\Rightarrow$ (a): Es gelte

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \qquad \text{mit } x_n \in D \setminus \{x_0\} \text{ für alle } n.$$

Wähle zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\forall x \in D : \|x - x_0\| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$$

Sei nun $N = N(\varepsilon)$ mit

$$\forall n \geq N \; : \; \|x_n - x_0\| < \delta.$$

Dann folgt direkt

$$\forall n \geq N \; : \; \|f(x_n) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0),$$

d.h. die Funktion $f(x)$ ist stetig im Punkt x_0. ■

Beispiele für stetige Funktionen.

- Konstante Funktionen $f : D \to W$, $f(x) \equiv a \in W$, sind stetig.

- Die Identität $\mathrm{id} : V \to V$, definiert durch $\mathrm{id}(v) = v$ für alle $v \in V$, ist stetig.

- Univariate Polynome, $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$), der Form

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \qquad a_k \in \mathbb{R} \text{ (oder } a_k \in \mathbb{C}\text{)},$$

  sind stetig.

- Multivariate Polynome, d.h. Polynome in n (reellen oder komplexen) Variablen, $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (oder $p : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$), der Form

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{k_n=0}^{m_n} a_{k_1,\ldots,k_n} \cdot x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$$

  sind stetig.

Weitere Beispiele für stetige Funktionen.

- Die Wurzelfunktion $\sqrt[m]{x} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist stetig auf $[0, \infty)$.
- Eine Potenzreihe, $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$), der Form

$$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \qquad a_k \in \mathbb{R} \text{ (oder } z \in \mathbb{C}),$$

  ist auf dem Bereich, wo die Reihe $p(z)$ *absolut* konvergiert, stetig.
- **Beispiel:** Die absolut konvergente Exponentialreihe $\exp(z)$ ist überall stetig. Weiterhin sind die Funktionen $\log(z)$, $\sin(z)$, und $\cos(z)$ auf ihren jeweiligen Definitionsbereichen stetig.
- Sind die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ stetig im Punkt x_0, so auch

$$f(x) + g(x), \quad \lambda \cdot f(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad (\text{für } g(x_0) \neq 0).$$

- **Allgemeiner:** Die Komposition stetiger Funktionen ist stetig.
  Beispiel: $f(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$ ist auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ stetig. □

Satz: *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen und beschränkten Intervall* $[a, b] \subset \mathbb{R}$*. Dann gelten die folgenden Eigenschaften.*

(a) Existenz einer Nullstelle.

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists x_0 \in (a, b) : f(x_0) = 0$$

(b) Zwischenwertsatz.

$$f(a) < c < f(b) \quad \Longrightarrow \quad \exists x_0 \in (a, b) : f(x_0) = c$$

(c) Stetigkeit der Umkehrfunktion.

Ist f *streng monoton wachsend, d.h.* $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$, *so ist auch die Umkehrfunktion* $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to \mathbb{R}$ *stetig streng monoton wachsend.*

(d) Min-Max-Eigenschaft.

Die Funktion f *nimmt ihr Maximum und Minimum auf* $[a, b]$ *an, d.h. es gibt* $x_1, x_2 \in [a, b]$ *mit*

$$f(x_1) = \min_{x \in [a,b]} f(x) \quad \text{und} \quad f(x_2) = \max_{x \in [a,b]} f(x).$$

Beweis:

(a): klar mit Bisektionsverfahren.

(b): wende Teil (a) auf die Funktion $g(x) = f(x) - c$ an.

(c): Übung (siehe Literatur).

(d): Weise die Existenz des Maximums nach. Sei $s = \sup\{f(x) \mid a \leq x \leq b\}$. Dann existiert eine Folge $(x_k)_k \subset [a,b]$ mit $f(x_k) \longrightarrow s \; (k \longrightarrow \infty)$.

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß gibt es eine *konvergente* Teilfolge $(x_{k_j})_j$ von $(x_k)_k$ in $[a,b]$, d.h. für ein $x_0 \in [a,b]$ gilt

$$x_{k_j} \longrightarrow x_0 \quad (j \longrightarrow \infty) \qquad \text{und} \qquad f(x_{k_j}) \longrightarrow s \quad (j \longrightarrow \infty)$$

Wegen der Stetigkeit von f gilt $s = f(x_0) = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$.

Den Nachweis für die Existenz des Minimums führt man analog. ■

Wichtige Bemerkung.

Für die Gültigkeit der Min-Max-Eigenschaft ist es wesentlich, dass man ein `kompaktes` (d.h. abgeschlossenes und beschränktes) Intervall $[a, b]$ betrachtet.

Sonst gilt die Aussage im Allgemeinen nicht!!!

Gegenbeispiel:

Betrachte die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $D = (0, \infty) \subset \mathbb{R}$ und

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad \text{für } x \in D = (0, \infty).$$

- f ist auf ganz D stetig, nimmt aber weder Minimum noch Maximum auf D an.

Min-Max-Eigenschaft für multivariate Funktionen.

Definition: *Eine Menge* $D \subset \mathbb{R}^n$ *heißt* kompakt (folgenkompakt)*, falls jede Folge* $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $\mathbf{x}_k \in D$, *eine* **in der Menge** D *konvergente Teilfolge*

$$\mathbf{x}_{k_j} \longrightarrow \mathbf{x}_0 \in D \; (j \to \infty)$$

besitzt. □

Satz: *Ist* $D \subset \mathbb{R}^n$ *eine kompakte Menge und ist die Funktion* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig auf* D*, so nimmt* f *auf* D *Minimum und Maximum an, d.h. es gibt Punkte* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D$ *mit*

$$f(\mathbf{x}_1) = \min_{\mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x}) \quad \textit{und} \quad f(\mathbf{x}_2) = \max_{\mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x}).$$

Beweis: Analog wie der Beweis von Teil (d) im vorigen Satz.
Verwende dazu insbesondere den Satz von Bolzano-Weierstraß. ■

Kriterien für Kompaktheit.

Satz: *Für eine Menge* $D \subset \mathbb{R}$ *sind die folgenden Eigenschaften äquivalent.*

(a) D *ist kompakt;*

(b) D *ist abgeschlossen und beschränkt;*

(c) `Heine-Borel-Überdeckung`*:*
Jede offene Überdeckung von D *besitzt eine* **endliche** *Teilüberdeckung, d.h. es gilt*

$$D \subset \bigcup_{i \in I} U_i, \quad U_i \text{ offen} \quad \Longrightarrow \quad \exists\, i_1, \ldots, i_k \in I : D \subset \bigcup_{j=1}^{k} U_{i_j}$$

$\square$

Beweis: (nur die Äquivalenz $(a) \iff (b)$).

$(a) \Rightarrow (b)$**:** Sei D kompakt.

Angenommen, D wäre unbeschränkt. Dann gibt es eine Folge $(x_m) \subset D$ mit $\lim_{m\to\infty} \|x_m\| = \infty$. Diese Folge kann allerdings keine konvergente Teilfolge besitzen. Dies steht im Widerspruch zur Kompaktheit von D.

Angenommen, D wäre nicht abgeschlossen. Dann gibt es einen Häufungspunkt x_0 von D mit $x_0 \notin D$, d.h. es gibt eine Folge $(x_m) \subset D$ mit $\lim_{m\to\infty} x_m = x_0 \notin D$. Diese Folge kann aber keine in D konvergente Teilfolge besitzen. Dies steht im Widerspruch zur Kompaktheit von D.

$(b) \Rightarrow (a)$**:** Sei D abgeschlossen und beschränkt.

Sei $(x_m) \subset D$ eine Folge in D. Da D beschränkt ist, ist auch die Folge (x_m) beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt (x_m) eine konvergente Teilfolge (x_{m_j}) mit $x_{m_j} \to x_0$. Da D abgeschlossen ist, liegt x_0 in D. Somit ist (x_{m_j}) eine in D konvergente Teilfolge von (x_m). ■

Beispiel.

Sei $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|$, d.h.

$$\mathbb{S}^{n-1} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}.$$

Offensichtlich ist $\mathbb{S}^{n-1}$ kompakt (abgeschlossen und beschränkt).

Somit existieren für jede gegebene Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ zwei Vektoren $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{S}^{n-1}$ mit

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}_1\| = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{n-1}} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \quad \text{und} \quad \|\mathbf{A}\mathbf{x}_2\| = \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{n-1}} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|$$

Dies folgt aus der Min-Max-Eigenschaft, denn die Funktion

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|$$

ist stetig auf $\mathbb{S}^{n-1}$. $\square$

Gleichmäßige Stetigkeit.

Definition: *Eine Funktion* $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, *heißt* gleichmäßig stetig *auf* D, *falls gilt:*

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, \delta > 0 : \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| < \varepsilon \qquad \square$$

Satz: *Jede stetige Funktion auf einem Kompaktum ist gleichmäßig stetig. D.h.:*

Sei $f : D \to \mathbb{R}^m$ *eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge* $D \subset \mathbb{R}^n$*.*
Dann ist f *gleichmäßig stetig auf* D*.* $\square$

Bemerkung: Falls $f : D \to \mathbb{R}^m$ gleichmäßig stetig auf D, so ist f stetig auf D.

Beispiele:

- $f(x) = 1/x$ ist stetig auf $(0, \infty)$, aber nicht gleichmäßig stetig auf $(0, \infty)$.
- $f(x) = \exp(x)$ ist stetig auf $\mathbb{R}$, aber nicht gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$.
- $f(x) = \sin(x)$ ist stetig auf $\mathbb{R}$ und sogar gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$.

Stetigkeit vs Gleichmäßige Stetigkeit.

Beispiel: Betrachte die Funktion $f(x) = 1/x$ auf dem Intervall $D = (0, 1]$.

- f ist in jedem Punkt $p \in (0, 1]$ stetig.

Denn: Sei $p \in (0, 1]$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Setze $\delta = \min\left(\frac{p}{2}, \frac{p^2\varepsilon}{2}\right)$.

Dann gilt für alle $x \in D$ mit $|x - p| < \delta$ (und somit $x \geq p/2$),

$$|f(x) - f(p)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{p}\right| = \left|\frac{x-p}{xp}\right| \leq \frac{2|x-p|}{p^2} < \frac{2\delta}{p^2} \leq \varepsilon.$$

- f ist nicht gleichmäßig stetig auf D.

Denn: man kann (zu gegebenem ε) δ nicht unabhängig von p wählen.

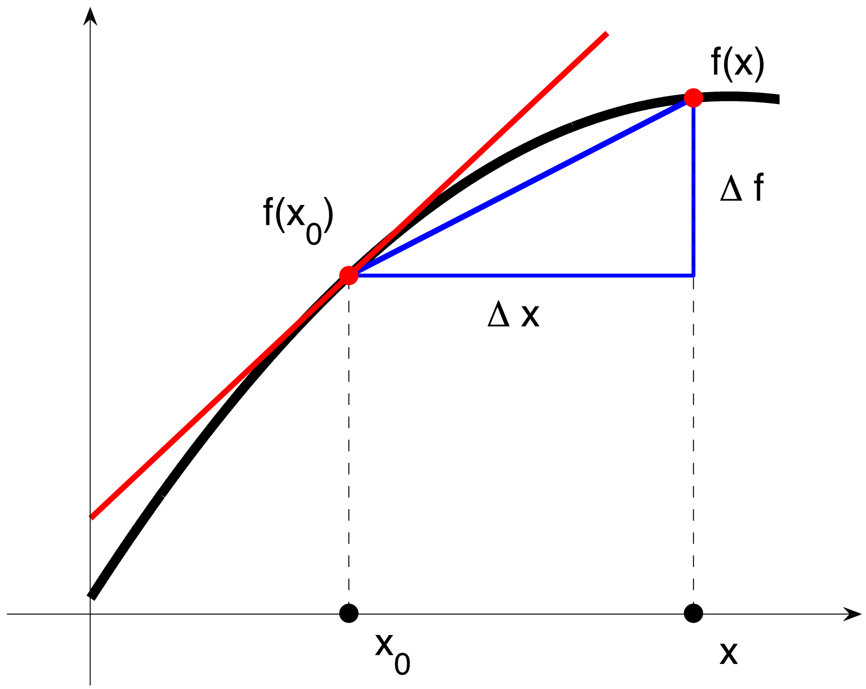
Wäre f gleichmäßig stetig auf $D = (0, 1]$, so gäbe es zu $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$ mit

$$|f(x) - f(y)| < 1 \qquad \text{für alle } x, y \in (0, 1] \text{ mit } |x - y| < \delta.$$

Es gibt aber ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$|1/n - 1/(2n)| = 1/(2n) < \delta \quad \text{und} \quad |f(1/n) - f(1/(2n))| = n \geq 1. \qquad \blacksquare$$

5.2 Differentialrechnung einer Variablen



Differenzenquotient und Differentialquotient.

Der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad \text{für } x \neq x_0,$$

gibt die Sekantensteigung an. Betrachten nun den Grenzübergang $x \to x_0$.

Definition: *Sei* $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ *eine Funktion und* $x_0 \in D \cap D'$ *ein Punkt.*

- *Für* $x \in D$, $x \neq x_0$, *nennt man den Ausdruck*

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Differenzenquotient *bzw.* Sekantensteigung *von* f *bezüglich* x.

- *Die Funktion* f *heißt* differenzierbar *in* x_0, *falls der Grenzwert*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. In diesem Fall nennt man den Grenzwert Ableitung *oder* Differentialquotient *der Funktion* f *an der Stelle* x_0 *und schreibt*

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

□

Definition: *Sei* $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ *eine Funktion und* $x_0 \in D \cap D'$ *ein Punkt.*

- *Dann heißen die einseitigen Grenzwerte*

$$f'(x_0^+) := \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0^-) := \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

`rechtsseitige` *bzw.* `linksseitige Ableitung` *von* f *bei* x_0.

□

Bemerkung: *Falls* f *differenzierbar in* x_0, *so stimmen die rechtsseitige und linksseitige Ableitung von* f *bei* x_0 *überein.* □

Eine Interpretation der Ableitung einer Funktion.

Die zeitliche Bewegung eines Massenpunktes sei beschrieben durch eine Funktion

$$c : I \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad c = c(t), \quad I \subset \mathbb{R},$$

wobei t die Zeit und $c(t)$ der Ort des Massenpunktes. Dann ist die Ableitung

$$\dot{c}(t_0) := \frac{dc}{dt}(t_0) := \lim_{t \to t_0} \frac{c(t) - c(t_0)}{t - t_0}$$

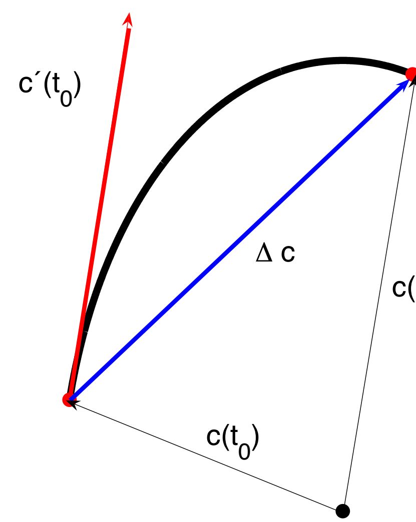
die Geschwindigkeit, mit der sich der Massenpunkt bewegt.

Erklärung: In $\Delta t = t - t_0$ legt der Massenpunkt die Strecke $\Delta c = c(t) - c(t_0)$ zurück; die *mittlere Geschwindigkeit* beträgt

$$\frac{\Delta c}{\Delta t} = \frac{c(t) - c(t_0)}{t - t_0}.$$

Für $t \to t_0$ erhält man die *momentane Geschwindigkeit*,

$$\dot{c}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{c(t) - c(t_0)}{t - t_0}.$$



Beispiel: Ableitung von Monomen.

Betrachte die Monomfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x) = x^n$, für $n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt

$$x^n - x_0^n = (x - x_0) \sum_{j=0}^{n-1} x^{n-1-j} x_0^j, \qquad \text{für } x, x_0 \in \mathbb{R},$$

und somit

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \sum_{j=0}^{n-1} x^{n-1-j} x_0^j = n x_0^{n-1}$$

Fazit: Die Funktion $f(x) = x^n$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = n x^{n-1}, \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

für die (erste) Ableitung von f. $\square$

Bemerkung: Für eine konstante Funktion $f(x) \equiv c$ gilt $f'(x) \equiv 0$. $\square$

Linearität der Ableitung.

Sind die beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ differenzierbar, so sind auch

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \qquad \text{und} \qquad (\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x) \qquad \text{für } \lambda \in \mathbb{R},$$

differenzierbare Funktionen, und es gilt

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) \qquad \text{und} \qquad (\lambda f)'(x) = \lambda \cdot f'(x).$$

Ableitung von Polynomen.

Sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein `Polynom`, d.h. p hat die Form

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad \text{mit Koeffizienten } a_k \in \mathbb{R} \text{ für } 0 \leq k \leq n.$$

Dann ist die (erste) Ableitung von p gegeben durch

$$\frac{d}{dx}(p(x)) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d}{dx} x^k = \sum_{k=1}^{n} a_k \, k \, x^{k-1}.$$

Ableitung elementarer Funktionen.

Funktion	Ableitung	Parameter
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}, x > 0$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
$\log(x)$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$\tan x$	$1/\cos^2(x)$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$

Ableitung von vektorwertigen Funktionen.

Sei $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}$, eine vektorwertige Funktion, d.h. f hat die Form

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))^T \in \mathbb{R}^m, \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Dann wird die Ableitung von f *komponentenweise* berechnet, d.h. es gilt

$$f'(x) = (f_1'(x), \ldots, f_m'(x))^T, \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Beispiele:

$$f(x) = (x, e^x, \sin x)^T \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = (1, e^x, \cos x)^T$$
$$f(x) = (\cos x, \sin x)^T \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = (-\sin x, \cos x)^T$$

$\square$

Aus Differenzierbarkeit folgt Stetigkeit.

Satz: *Ist* $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ *in* $x_0 \in D^0$ *differenzierbar, so ist* f *in* x_0 *stetig.*

Beweis: Sei f in x_0 differenzierbar. Dann folgt

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0) - (x - x_0) \cdot f'(x_0) \right) = 0$$

unmittelbar aus der Voraussetzung

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Wegen $\lim_{x \to x_0} (x - x_0) f'(x_0) = 0$ folgt schließlich

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

d.h. die Funktion f ist in x_0 stetig. ■

VORSICHT! Die Umkehrung dieser Aussage gilt im Allgemeinen nicht!

Beispiel: Die Funktion $f(x) = |x|$ ist stetig, aber nicht differenzierbar in Null. □

Wichtige Differentiationsregeln.

Satz: *Seien* $f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, *in* $x_0 \in D^0$ *differenzierbare Funktionen. Dann gelten die folgenden Differentiationsregeln.*

(a) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *ist* $\alpha f + \beta g$ *in* x_0 *differenzierbar, und es gilt*

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

(b) Die Funktion $f \cdot g$ *ist in* x_0 *differenzierbar, und es gilt die* `Produktregel`

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$$

(c) Ist $g(x_0) \neq 0$, *so ist die Funktion* $f(x)/g(x)$ *in* x_0 *differenzierbar, und es gilt die* `Quotientenregel`

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

Beweis: Die Behauptung in Teil (a) folgt unmittelbar aus der Identität

$$\frac{(\alpha f(x) + \beta g(x)) - (\alpha f(x_0) + \beta g(x_0))}{x - x_0} = \alpha \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \beta \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Genauso folgt Teil (b) aus der Identität

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Zu Teil (c): Es gilt

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = -\frac{1}{g(x) \cdot g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}, \qquad \text{für } g(x_0), g(x) \neq 0,$$

und somit $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$ für $g(x_0) \neq 0$.

Die Behauptung folgt schließlich wie folgt aus der Produktregel, Teil (b).

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - f(x_0) \frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

$\blacksquare$

Weitere Wichtige Differentiationsregeln.

Satz:

(a) *Seien* $f : D \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$ *mit* $D, E \subset \mathbb{R}$ *und* $x_0 \in D^0 \cap (f^{-1}(E))^0$. *Falls* f *differenzierbar in* x_0 *und* g *differenzierbar in* $y_0 = f(x_0)$, *so ist auch die Komposition* $g \circ f$ *in* x_0 *differenzierbar, und es gilt die* `Kettenregel`

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

(b) *Ist* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *streng monoton wachsend und in* $x_0 \in [a, b]$ *differenzierbar mit* $f'(x_0) \neq 0$, *so ist auch die Umkehrfunktion* $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to \mathbb{R}$ *in* $y_0 = f(x_0)$ *differenzierbar, und es gilt*

$$\left((f^{-1})' \circ f\right)(x_0) = (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Beweis: Teil (a): Nach Voraussetzung gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \eta_1(x)(x - x_0), & \lim_{x\to x_0} \eta_1(x) = f'(x_0), \\ g(y) &= g(y_0) + \eta_2(y)(y - y_0), & \lim_{y\to y_0} \eta_2(y) = g'(y_0), \end{aligned}$$

wobei $y = f(x)$ und $y_0 = f(x_0)$. Daraus folgt

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x_0) + \eta_2(f(x)) \cdot \eta_1(x)(x - x_0)$$

und somit

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = \eta_2(f(x)) \cdot \eta_1(x) \longrightarrow g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \quad \text{für } x \to x_0.$$

Teil (b): Nach Voraussetzung gilt

$$f(x) = f(x_0) + \eta(x)(x - x_0), \qquad \lim_{x\to x_0} \eta(x) = f'(x_0) \neq 0,$$

somit $y = y_0 + \eta(f^{-1}(y))(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0))$ für $x = f^{-1}(y)$, und daher

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\eta(f^{-1}(y))} \longrightarrow \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \quad \text{für } y \to y_0. \qquad \blacksquare$$

Verallgemeinerte Produktregel.

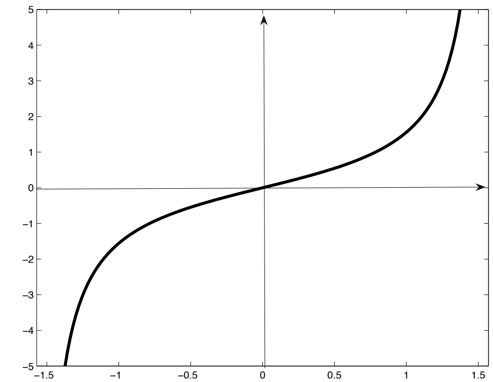
Satz: *Ist* $(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine* Bilinearform, *und sind* $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}$, *in* $x_0 \in D^0$ *differenzierbar, so ist auch die Funktion* (f, g) *in* x_0 *differenzierbar, und es gilt die* verallgemeinerte Produktregel

$$\frac{d}{dx}(f(x), g(x))\bigg|_{x=x_0} = (f'(x_0), g(x_0)) + (f(x_0), g'(x_0)).$$

Beweis: Analog zum Beweis der Produktregel:

$$\begin{aligned} & \frac{(f(x), g(x)) - (f(x_0), g(x_0))}{x - x_0} \\ = \quad & \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, g(x)\right) + \left(f(x_0), \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right) \\ \longrightarrow \quad & (f'(x_0), g(x_0)) + (f(x_0), g'(x_0)), \qquad \text{für } x \to x_0. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Beispiel: Anwendung der Quotientenregel.



Betrachte die Tangensfunktion

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \text{für } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Aus den Ableitungen der trigonometrischen Funktionen

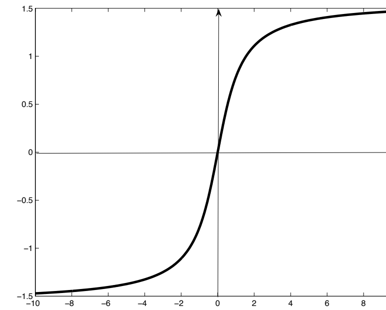
$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$$

erhält man die Ableitung der Tangensfunktion mit der Quotientenregel:

$$\frac{d}{dx}\tan(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right) = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) + \sin(x)\cdot\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)},$$

für $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. ■

Beispiel: Ableitung der Umkehrfunktion.

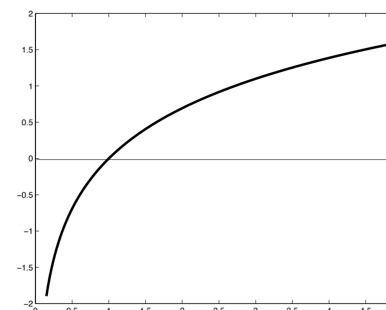


Beispiel 1: Betrachte die Umkehrfunktion der Tangensfunktion,

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Für die Ableitung von $x = \arctan(y)$, d.h. $y = \tan(x)$, erhält man

$$\frac{d}{dy}\arctan(y) = \frac{1}{\frac{d}{dx}\tan(x)} = \frac{1}{1/\cos^2(x)} = \cos^2(x) = \frac{1}{1+\tan^2(x)} = \frac{1}{1+y^2}.$$



Beispiel 2: Betrachte den `Logarithmus`, die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $\exp(x)$,

$$\log : (0,\infty) \to \mathbb{R}.$$

Für die Ableitung von $x = \log(y)$, d.h. $y = \exp(x)$, erhält man

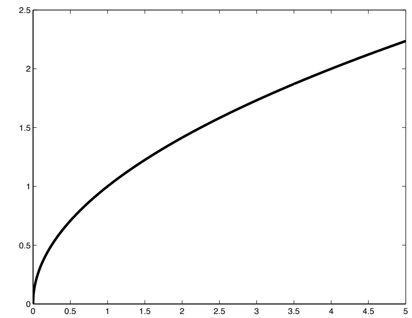
$$\frac{d}{dy}\log(y) = \frac{1}{\frac{d}{dx}\exp(x)} = \frac{1}{\exp(x)} = \frac{1}{y}, \qquad \text{für } y \in (0,\infty). \qquad \blacksquare$$

Weiteres Beispiel: Ableitung der Umkehrfunktion.

Betrachte **Wurzelfunktion** $\sqrt[n]{\cdot} : (0, \infty) \to (0, \infty)$,

$$x \mapsto \sqrt[n]{x} \qquad \text{für } x \in (0, \infty) \text{ und } n \geq 2,$$

als Umkehrfunktion der Monomfunktion $f(x) = x^n$.



$f(x) = \sqrt{x}$

Für die Ableitung von $x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}$, d.h. $y = x^n$, erhält man

$$\frac{d}{dy}\sqrt[n]{y} = \frac{1}{\frac{d}{dx}x^n} = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{ny^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1}{n}-1}.$$

■

Zwei Beispiele zur Anwendung der Kettenregel.

Beispiel 1: Betrachte für $f(x) = \exp(x)$ und $g(y) = \cos(y)$ die Komposition

$$(g \circ f)(x) = \cos(\exp(x)) : \mathbb{R} \to [-1, 1].$$

Die Ableitung von $g \circ f$ berechnet man mit der Kettenregel wie folgt.

$$\frac{d}{dx} \cos(\exp(x)) = -\sin(\exp(x)) \cdot \exp(x)$$

Beispiel 2: Betrachte die Exponentialfunktion $a^x = \exp(x \cdot \log(a))$ für $a > 0$.

Die Ableitung der Funktionen a^x und x^x berechnet man mit der Kettenregel:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} a^x &= \frac{d}{dx}(\exp(x \log(a))) = \exp(x \log(a)) \cdot \log(a) = \log(a) \cdot a^x \\
\frac{d}{dx} x^x &= \frac{d}{dx}(\exp(x \log(x))) = \exp(x \log(x)) \left(1 \cdot \log(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right) \\
&= x^x \left(1 + \log(x)\right), \qquad \text{für } x > 0.
\end{aligned}$$

■

Ableitungen höherer Ordnung.

- Ist eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in jedem Punkt $x_0 \in [a, b]$ differenzierbar, so ist die Ableitung von f ebenso eine Funktion, $f' : [a, b] \to \mathbb{R}$.
- Ist f' überall differenzierbar, so erhält man die `zweite Ableitung` f'' von f.
- Ist f'' überall differenzierbar, so erhält man die `dritte Ableitung` f''' usw.
- Ist f n-mal differenzierbar auf $[a, b]$ und ist die n-te Ableitung $f^{(n)}$ auf $[a, b]$ stetig, so heißt f `n-mal stetig differenzierbar`, `C^n-Funktion`.
- Ist f n-mal differenzierbar auf $[a, b]$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, so heißt f `beliebig oft differenzierbar` (unendlich oft differenzierbar), `C^∞-Funktion`.

Notation:

$$
\begin{aligned}
f \in C^0([a, b]) \quad &:\Longleftrightarrow \quad f \text{ stetig auf } [a, b] \\
f \in C^n([a, b]) \quad &:\Longleftrightarrow \quad f\ n\text{-mal stetig differenzierbar auf } [a, b] \\
f \in C^\infty([a, b]) \quad &:\Longleftrightarrow \quad f \text{ beliebig oft differenzierbar auf } [a, b]
\end{aligned}
$$

6 Weiterer Ausbau der Differentialrechnung

6.1 Mittelwertsätze, Extremwerte, Satz von Taylor

Motivation: Wie wählt man Höhe und Durchmesser einer Konservendose, so dass bei festem Volumen V möglichst wenig Blech verbraucht wird?

Sei r der Radius der Grundfläche und h die Höhe der Konservendose. Dann gilt

$$f(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

für die Oberfläche der Konservendose.

Ziel: Minimiere f unter Variation von r und h unter der Nebenbedingung

$$V = \pi r^2 h \qquad \Longleftrightarrow \qquad h = \frac{V}{\pi r^2}.$$

Minimiere somit

$$f(r) = 2\pi r^2 + 2\frac{V}{r}$$

unter Variation von r. □

Klassifikation von Extrema.

Definition: *Sei* V *normierter Vektorraum und* $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset V$, *eine Funktion.*

Dann hat die Funktion f *in* $x_0 \in D$

- *ein* globales Maximum, *falls* $f(x) \leq f(x_0)$ *für alle* $x \in D$.
- *ein* strenges globales Maximum, *falls* $f(x) < f(x_0)$ *für alle* $x \in D \setminus \{x_0\}$.
- *ein* lokales Maximum, *falls es ein* $\varepsilon > 0$ *gibt mit*

$$\|x - x_0\| < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leq f(x_0) \qquad \text{für alle } x \in D.$$

- *ein* strenges lokales Maximum, *falls es ein* $\varepsilon > 0$ *gibt mit*

$$\|x - x_0\| < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad f(x) < f(x_0) \qquad \text{für alle } x \in D \setminus \{x_0\}.$$

Die Begriffe (strenges) globales Minimum *und* (strenges) lokales Minimum *definiert man analog. Weiterhin fasst man die Begriffe "Minimum" und "Maximum" unter dem Oberbegriff* Extremum *zusammen.* □

Notwendige Kriterien für lokale Extrema.

Satz: *Besitzt eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Extremum, und ist f in x_0 differenzierbar, so gilt $f'(x_0) = 0$.*

Falls x_0 Randpunkt von $[a, b]$ (d.h. $x = a$ oder $x = b$), so gilt

- $f'(x_0) \le 0$ *($f'(x_0) \ge 0$) für ein lokales Maximum (Minimum) in $x_0 = a$,*
- $f'(x_0) \ge 0$ *($f'(x_0) \le 0$) für ein lokales Maximum (Minimum) in $x_0 = b$.*

Beweis: Sei $x_0 \in [a, b]$ ein lokales Maximum von f. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &\le 0 \quad \text{für } x_0 < x \le \min(x_0 + \varepsilon, b), \\ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &\ge 0 \quad \text{für } \max(x_0 - \varepsilon, a) \le x < x_0, \end{aligned}$$

und daher $f'(x_0^-) \ge 0$ und $f'(x_0^+) \le 0$. Für $x_0 \in (a, b)$ folgt somit $f'(x_0) = 0$. ■

Definition: *Ein Punkt x_0 mit $f'(x_0) = 0$ heißt* `stationärer Punkt` *von f.* □

Zurück zu dem Beispiel mit der Blechdose.

Ziel: Minimiere

$$f(r) = 2\pi r^2 + 2\frac{V}{r}$$

unter Variation von $r \in (0, \infty)$. Es gilt $h = \frac{V}{\pi r^2}$ für die Höhe der Dose.

- Die Funktion f ist stetig in $(0, \infty)$ und es gilt $V > 0$.
- Es gilt $\lim_{r \to 0+} f(r) = \lim_{r \to \infty} f(r) = \infty$.
- f besitzt somit in $(0, \infty)$ ein globales Minimum.
- Die notwendige Bedingung

$$f'(r) = 4\pi r - 2\frac{V}{r^2} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 4\pi r^3 = 2V$$

  für ein Minimum $r_0 \in (0, \infty)$ ist nur erfüllt für

$$r_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

- **Lösung:** f besitzt in r_0 ein strenges globales Minimum. Es gilt $h_0 = 2r_0$. $\square$

Ein weiteres Beispiel.

Betrachte die Funktion $f(x) = x^2\sqrt{1-x^2}$ auf dem Intervall $[-1,1]$. Es gilt

$$f'(x) = \frac{2x-3x^3}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{für } -1 < x < 1.$$

- **Stationäre Punkte**: $2x-3x^3 = 0$ gilt nur für $x \in \{-\sqrt{2/3}, 0, \sqrt{2/3}\}$.

$$f'(x) = \begin{cases} > 0 & : \quad -1 < x < -\sqrt{2/3} \\ < 0 & : \quad -\sqrt{2/3} < x < 0 \\ > 0 & : \quad 0 < x < \sqrt{2/3} \\ < 0 & : \quad \sqrt{2/3} < x < 1 \end{cases}$$

- **Globale Minima** bei $x = \pm 1$ und $x = 0$ mit Funktionswert $f(x) = 0$.
- **Globale Maxima** bei $x = \pm\sqrt{2/3}$ mit Funktionswert $f(x) = 2/(3\sqrt{3})$. $\square$

Ein erster Mittelwertsatz.

Satz (Satz von Rolle)**:** *Ist* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig auf* $[a, b]$ *und differenzierbar auf* (a, b)*, so gilt die Implikation*

$$f(a) = f(b) \quad \Longrightarrow \quad \exists\, x_0 \in (a, b) \;:\; f'(x_0) = 0.$$

Beweis: Da f auf dem Kompaktum $[a, b]$ stetig ist, nimmt f auf $[a, b]$ Minimum und Maximum an.

Fall 1: Liegen diese beiden Extrema am Rand des Intervalls $[a, b]$, so ist f konstant, woraus folgt $f'(x) \equiv 0$.

Fall 2: Anderenfalls liegt ein Extremum x_0 in (a, b), woraus folgt $f'(x_0) = 0$.

■

Weitere Mittelwertsätze.

Satz:

- Erster Mittelwertsatz

  Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig auf* $[a, b]$ *und differenzierbar auf* (a, b), *so gilt:*

$$\exists x_0 \in (a, b) \quad : \qquad f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

- Zweiter Mittelwertsatz

  Sind die Funktionen f, g *stetig auf* $[a, b]$ *und differenzierbar auf* (a, b) *und gilt* $g'(x) \neq 0$ *für alle* $x \in (a, b)$, *so gilt*

$$\exists x_0 \in (a, b) \quad : \qquad \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Beweis: 1. MWS: Die Funktion

$$h(x) = f(x) - \frac{x-a}{b-a}(f(b) - f(a))$$

erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Rolle, denn $h(a) = f(a) = h(b)$. Somit gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$0 = h'(x_0) = f'(x_0) - \frac{1}{b-a}(f(a) - f(b)).$$

2. MWS: Wegen $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$, gilt $g(b) \neq g(a)$. Somit erfüllt die Funktion

$$h(x) = f(x) - g(x) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

die Voraussetzungen des Satzes von Rolle, denn es gilt

$$h(a) = f(a) - g(a) \cdot \tfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = f(b) - g(b) \cdot \tfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = h(b).$$

Somit gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$0 = h'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \qquad \blacksquare$$

Folgerungen aus den Mittelwertsätzen.

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf $[a, b]$. Dann gilt:

- Falls $f'(x) \equiv 0$, so ist f konstant auf $[a, b]$.
- Falls $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$, genau dann wenn f monoton wachsend.
- Falls $f'(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$, dann ist f streng monoton wachsend.
- Falls $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in [a, b]$, genau dann wenn f monoton fallend.
- Falls $f'(x) < 0$ für alle $x \in [a, b]$, dann ist f streng monoton fallend.

$\square$

Beispiel. Betrachte $f(x) = x - \log(1 + x)$ für $x \in (-1, \infty)$. Wegen

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \begin{cases} < 0 & \text{für } -1 < x < 0, \\ > 0 & \text{für } 0 < x < \infty, \end{cases}$$

ist f streng monoton fallend in $(-1, 0]$, streng monoton wachsend in $[0, \infty)$. $\square$

Definition (Landau-Symbole): *Für eine Funktion* $\varphi : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $0 \in D \cap D'$, *und* $k \in \mathbb{N}_0$ *sagt man:*

$$\varphi(h) = o(h^k) \quad :\Longleftrightarrow \quad \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(h)}{h^k} = 0$$

$$\varphi(h) = \mathcal{O}(h^k) \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists\, C, \varepsilon > 0 \;:\; \forall\, 0 < |h| < \varepsilon \;:\; \left| \frac{\varphi(h)}{h^k} \right| \leq C$$

$\square$

Bedeutung:

$\varphi(h) = o(h^k)$:

$\varphi(h)$ konvergiert für $h \to 0$ schneller gegen Null als h^k.

$\varphi(h) = \mathcal{O}(h^k)$:

$\varphi(h)$ konvergiert für $h \to 0$ mindestens so schnell gegen Null wie h^k.

Beispiel: Ist f differenzierbar in x_0, so gilt:

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0).$$

Taylor-Entwicklungen und Taylor-Polynome.

Ausgangsfrage: Wie kann man $f(x)$ in der Nähe von x_0 approximieren?

0. Antwort: $f(x) \approx f(x_0)$ für $x \approx x_0$.

1. Antwort: Ist f differenzierbar, so gilt

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\textbf{Polynom vom Grad 1}} + o(x - x_0)$$

2. Antwort: Ist f zweimal differenzierbar, so gilt

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2}}_{\textbf{Polynom vom Grad 2}} + o\left((x - x_0)^2\right),$$

denn es gilt

$$f'(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Hinweis: Integration über $[x_0, x]$ liefert die zweite Antwort. $\square$

Satz (Satz von Taylor): *Sei* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *eine* C^n*-Funktion und* $x_0 \in (a,b)$. *Dann gilt*

$$f(x) = T_n(x; x_0) + o\left((x - x_0)^n\right)$$

mit dem (eindeutig bestimmten) Taylor-Polynom

$$T_n(x; x_0) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Den Punkt x_0 *nennt man den* Entwicklungspunkt.

Ist f *eine* C^{n+1}*-Funktion, so gilt die* Lagrange-Restgliedformel

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x; x_0)$$

$$R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

für ein $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$ *mit* $\theta \in (0,1)$. □

Zur Form des Taylorschen Polynoms.

Ziel: Approximiere f durch ein Polynom der Form

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k \qquad \text{mit } a_k \in \mathbb{R}.$$

Forderungen: $f^{(j)}(x_0) = T^{(j)}(x_0)$ für $j = 0, 1, \ldots, n$.

Beachte: Für die j-te Ableitung von $T(x)$ gilt

$$T^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{n} a_k k(k-1) \cdot \ldots \cdot (k-j+1)(x-x_0)^{k-j}$$

und weiterhin $T^{(j)}(x_0) = a_j \cdot j! = f^{(j)}(x_0)$ mit der obigen Forderung.

Somit gilt

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \equiv T_n(x; x_0).$$

$\square$

Restgliedformeln für das Taylorsche Polynom.

Ausgangspunkt. Mit dem Satz von Taylor gilt $f(x) = T_n(x; x_0) + R_n(x; x_0)$.

- Integraldarstellung:

$$R_n(x; x_0) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x - t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$$

- Cauchy-Restgliedformel:

$$R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x - x_0)^{n+1} (1 - \theta)^n$$

mit $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $\theta \in (0, 1)$

- Schlömilch-Restgliedformel:

$$R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{p \cdot n!} (x - x_0)^{n+1} (1 - \theta)^{n+1-p}$$

mit $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $\theta \in (0, 1)$, $p \in \{1, 2, \ldots, n + 1\}$. $\square$

Taylor-Entwicklung der Exponentialfunktion.

Betrachte die Exponentialfunktion $f(x) = \exp(x)$. Zunächst gilt:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\exp(x) = \exp(x).$$

Mit dem Satz von Taylor gilt um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ die Darstellung

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x;0)$$

mit dem Lagrange-Restglied

$$R_n(x;0) = \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad \text{für } \xi = \theta x \text{ mit } 0 < \theta < 1$$

Daraus bekommt man für $0 \leq x \leq 1$ die Fehlerabschätzung

$$|R_n(x;0)| = \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \leq \frac{e}{(n+1)!}$$

Beispiel: Für $n = 10$ bekommt man $|R_{10}(x;0)| \leq 6.81 \cdot 10^{-8}$. $\square$

Taylor-Entwicklung der Sinusfunktion.

Betrachte die Sinusfunktion $f(x) = \sin(x)$. Zunächst gilt:

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$$

Mit dem Satz von Taylor gilt um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ die Darstellung

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+2}(x;0)$$

mit dem Lagrange-Restglied

$$R_{2n+2}(x;0) = (-1)^{n+1}\frac{\cos(\xi)}{(2n+3)!}x^{2n+3} \qquad \text{für } \xi = \theta x \text{ mit } 0 < \theta < 1$$

Beispiel: Für $x \in [-\pi/6, \pi/6]$, $x \neq 0$ und $n = 3$ bekommt man

$$|R_8(x;0)| \leq \frac{1}{9!} \cdot |x|^9 \leq \frac{1}{9!} \cdot \left(\frac{\pi}{6}\right)^9 \approx 8.1513 \cdot 10^{-9}.$$

$\square$

Bemerkungen zu Taylor-Reihen.

- Die Taylor-Reihe

$$T_\infty(x; x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

einer C^∞-Funktion f ist im Allgemeinen **nicht konvergent**.

- Falls die Taylor-Reihe $T_\infty(x; x_0)$ von f konvergiert, so konvergiert $T_\infty(x; x_0)$ **nicht notwendigerweise** gegen f.

- Falls jedoch

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

gilt, so nennt man die Funktion f reell analytisch, zum Beispiel:

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Folgerung aus dem Satz von Taylor.

Satz: *Gilt für eine* C^{n+1}*-Funktion* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$\forall\, x \in [a, b] \quad : \quad f^{(n+1)}(x) = 0,$$

so ist $f(x)$ *ein Polynom höchstens* n*-ten Grades.*

Beweis: Für das Lagrange-Restglied gilt

$$R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = 0$$

und somit

$$f(x) \equiv T_n(x; x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

■

Beispiel: Taylor-Entwicklung für Polynome.

Ist die Funktion f ein Polynom vom Grad n, d.h. f besitzt die Darstellung

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad \text{mit } a_n \neq 0,$$

so ist für einen *beliebigen* Entwicklungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ das Taylor-Polynom $T_n(x; x_0)$ n-ten Grades von f um x_0 gegeben durch

$$T_n(x; x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

und es gilt $f \equiv T_n$, d.h. f und T_n sind identisch auf ganz $\mathbb{R}$.

- Das Taylor-Polynom T_n stellt f in der Polynombasis $\{(x - x_0)^k\}_{k=0}^{n}$ dar.
- Für den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ gilt $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, $0 \leq k \leq n$, und somit

$$T_n(x; 0) \equiv f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Auswertung von Polynomen durch Horner-Schema.

Sei p ein Polynom von Grad n mit der Darstellung

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k \qquad \text{mit } a_n \neq 0,$$

für ein $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann lässt sich p wie folgt darstellen.

$$p(x) = a_0 + (x - x_0)(a_1 + (x - x_0)(\ldots + (x - x_0)(a_{n-1} + (x - x_0)a_n) \ldots))$$

Dann wertet man p *stabil* und *effizient* mit dem `Horner-Algorithmus` aus.

```
y := 0;
for k = n,n-1,...,0
  y := a(k) + (x-x0)*y;
end;
```

Beispiel: Für $p(x) = 30(x-1)^3 + 100(x-1)^2 + 108(x-1) + 43$ gilt

$$p(x) = 43 + (x-1)(108 + (x-1)(100 + (x-1)30)).$$

Konvergenz des Newton-Verfahrens.

Satz: *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine* C^2*-Funktion und* $x^* \in (a, b)$ *eine einfache Nullstelle dieser Funktion. Dann ist das Newton-Verfahren*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

mit Startwerten x_0 *in der Nähe von* x^* *quadratisch konvergent.*

Beweis: Betrachte Taylor-Entwicklung zweiter Ordnung um $x_n \in [a, b]$,

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}(x - x_n)^2$$

woraus für $x = x^*$ mit $f(x^*) = 0$ und $f'(x^*) \neq 0$ folgt

$$-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = (x^* - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}(x^* - x_n)^2.$$

und somit

$$(x_{n+1} - x^*) = \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}\,(x_n - x^*)^2. \qquad \blacksquare$$

Hinreichende Kriterien für lokale Extrema.

Satz: *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine* C^2*-Funktion mit* $f'(x_0) = 0$ *für ein* $x_0 \in (a, b)$.

(a) Falls $f''(x_0) > 0$, *dann hat* f *in* x_0 *ein strenges lokales Minimum.*

(b) Falls $f''(x_0) < 0$, *dann hat* f *in* x_0 *ein strenges lokales Maximum.*

Beweis von (a): Mit der Lagrange-Restgliedformel gilt die Darstellung

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2$$

für ein $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$ mit $\theta \in (0, 1)$.

Da f'' stetig ist, ist f'' in einer Umgebung von x_0 positiv, d.h. es gilt

$$f''(x) > 0 \qquad \text{für alle } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon),$$

für ein $\epsilon > 0$. In diesem Fall besitzt f in x_0 ein strenges lokales Minimum.

Teil (b) beweist man analog. ■

Hinreichende Kriterien für lokale Extrema.

Problem: Was passiert im Fall $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$?

Hier gibt es zwei Möglichkeiten:

- Der stationäre Punkt x_0 ist ein strenges lokales Extremum.
- Der stationäre Punkt x_0 ist ein `Wendepunkt`.

Satz: *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine* C^{2n}*-Funktion mit*

$$f^{(k)}(x_0) = 0 \qquad \textit{für } 1 \leq k \leq 2n - 1$$

für ein $x_0 \in (a, b)$*.*

(a) Falls $f^{(2n)}(x_0) > 0$*, dann hat* f *in* x_0 *ein strenges lokales Minimum.*

(b) Falls $f^{(2n)}(x_0) < 0$*, dann hat* f *in* x_0 *ein strenges lokales Maximum.*

Beweis(idee): Mit der Lagrange-Restgliedformel gilt

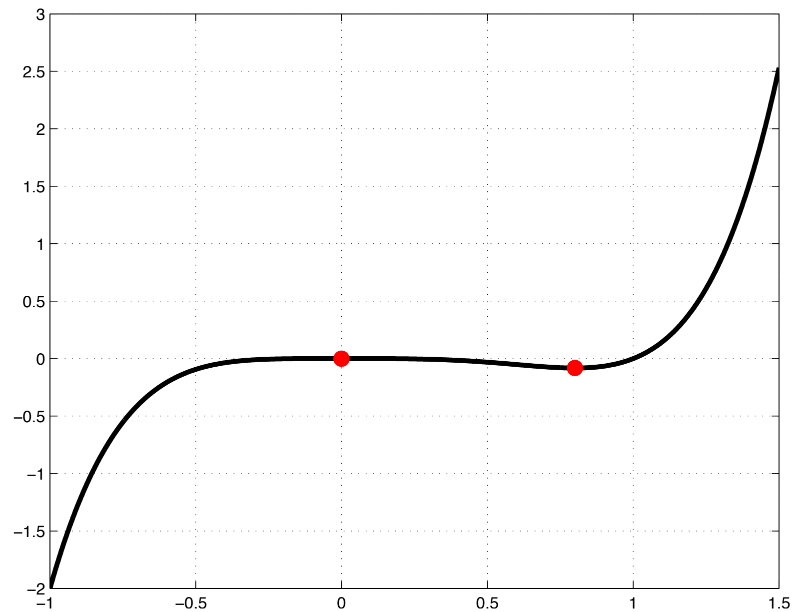
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}(x - x_0)^{2n}, \text{ für ein } \xi \in (x_0, x). \qquad \square$$

Beispiel. Betrachte die Funktion $f(x) = x^5 - x^4$.

Es gilt

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 5x^4 - 4x^3 \\
f''(x) &= 20x^3 - 12x^2 \\
f^{(3)}(x) &= 60x^2 - 24x \\
f^{(4)}(x) &= 120x - 24
\end{aligned}
$$

Weiterhin
$f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = 0$
sowie $f^{(4)}(0) = -24$.



$f(x) = x^5 - x^4$.

Somit besitzt f in $x_0 = 0$ ein strenges lokales Maximum.

Weiterhin besitzt f in $x_1 = 4/5$ ein strenges lokales Minimum,
denn es gilt $f'(4/5) = 0$ und $f''(4/5) = 64/25 > 0$. $\square$

Konvexität und Konkavität.

Definition: *Eine Funktion* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *heißt*

- konvex, *falls für alle* $a \le x_1 < x < x_2 \le b$ *gilt*

$$f(x) \le f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(f(x_2) - f(x_1)).$$

- streng konvex, *falls für alle* $a \le x_1 < x < x_2 \le b$ *gilt*

$$f(x) < f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(f(x_2) - f(x_1)).$$

- konkav, *falls für alle* $a \le x_1 < x < x_2 \le b$ *gilt*

$$f(x) \ge f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(f(x_2) - f(x_1)).$$

- streng konkav, *falls für alle* $a \le x_1 < x < x_2 \le b$ *gilt*

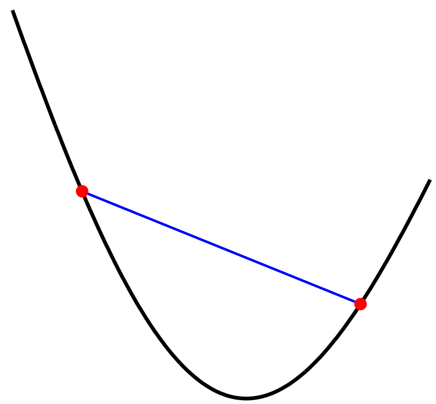
$$f(x) > f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(f(x_2) - f(x_1)).$$

$\square$

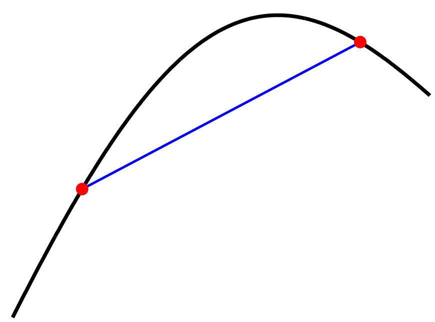
Kriterien für Konvexität und Konkavität.

Satz: *Sei* f *eine* C^2*-Funktion auf* $[a, b]$. *Dann gilt:*

- f *ist konvex, genau dann wenn* $f''(x) \geq 0$ *für alle* $x \in (a, b)$;
- f *ist konkav, genau dann wenn* $f''(x) \leq 0$ *für alle* $x \in (a, b)$.



f streng konvex (Linkskurve)



f streng konkav (Rechtskurve)

Bemerkung: Für eine C^1-Funktion f gilt:

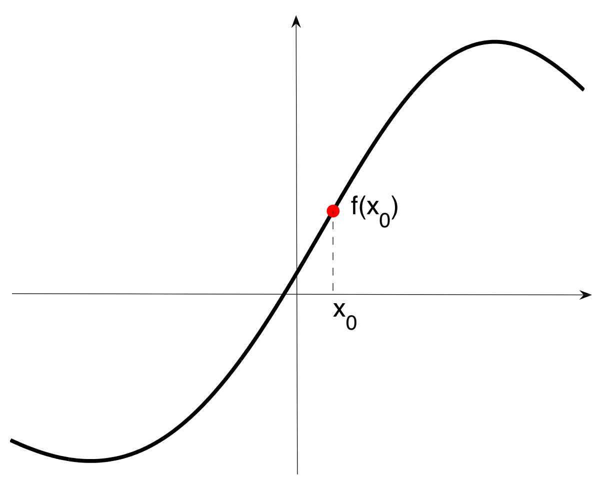
- Falls f streng konvex, so liegt der Graph von f oberhalb seiner Tangente.
- Falls f streng konkav, so liegt der Graph von f unterhalb seiner Tangente.

Wendepunkte.

Definition: *Eine Funktion* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *hat in* $x_0 \in (a, b)$ *einen* Wendepunkt, *falls eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist.*

- f *ist für ein* $\varepsilon > 0$ *konvex in* $(x_0 - \varepsilon, x_0) \subset [a, b]$ *und konkav in* $(x_0, x_0 + \varepsilon) \subset [a, b]$ *(*Links-Rechtskurve*).*
- f *ist für ein* $\varepsilon > 0$ *konkav in* $(x_0 - \varepsilon, x_0) \subset [a, b]$ *und konvex in* $(x_0, x_0 + \varepsilon) \subset [a, b]$ *(*Rechts-Linkskurve*).*

□



Links-Rechtskurve in x_0.

Kriterien für Wendepunkte.

Satz: *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine* C^3*-Funktion.*

(a) **Notwendiges Kriterium:**

Ist $x_0 \in (a, b)$ *ein Wendepunkt, so gilt:* $f''(x_0) = 0$.

(b) **Hinreichende Kriterien:**

- *Gilt* $f''(x_0) = 0$ *und* $f^{(3)}(x_0) > 0$ *für ein* $x_0 \in (a, b)$, *so ist* x_0 *ein Wendepunkt von* f *mit Rechts-Linkskurve.*
- *Gilt* $f''(x_0) = 0$ *und* $f^{(3)}(x_0) < 0$ *für ein* $x_0 \in (a, b)$, *so ist* x_0 *ein Wendepunkt von* f *mit Links-Rechtskurve.*

Beweis: (a) folgt direkt aus der Stetigkeit von f'' und der Eigenschaft von x_0.

Zu Teil (b): Aus $f''(x_0) = 0$ und $f^{(3)}(x_0) > 0$ folgt

$$f''(x) < 0 \text{ für } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \quad \text{und} \quad f''(x) > 0 \text{ für } x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$$

für ein $\varepsilon > 0$. Somit ist f konkav in $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ und konvex in $(x_0, x_0 + \varepsilon)$, d.h. x_0 ist Wendepunkt mit Rechts-Linkskurve. Analog die andere Aussage. ■

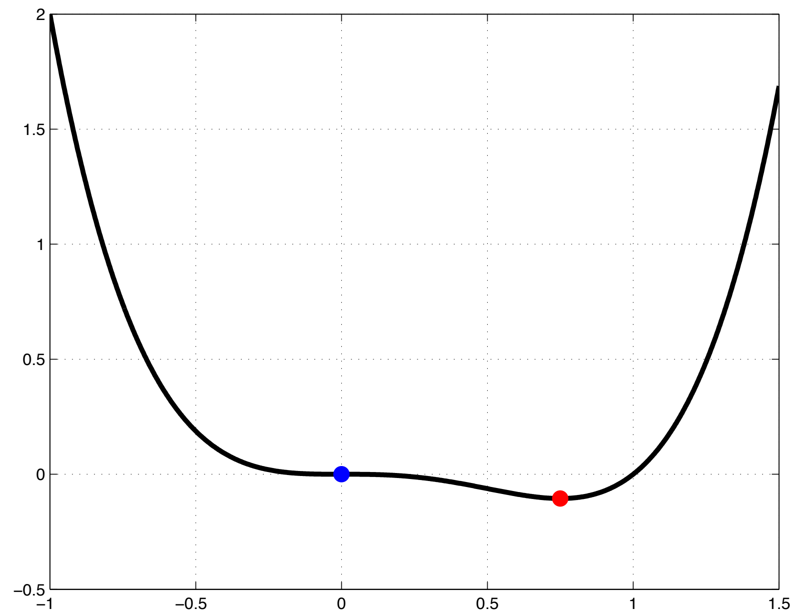
Beispiel. Betrachte die Funktion $f(x) = x^4 - x^3$.

Es gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 3x^2 \\ f''(x) &= 12x^2 - 6x \\ f'''(x) &= 24x - 6 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} f'(0) &= 0 \\ f''(0) &= 0 \\ f'''(0) &= -6 \end{aligned}$$



$f(x) = x^4 - x^3$.

Somit hat f in $x_0 = 0$ einen Wendepunkt (Links-Rechtskurve). Weiterhin hat f ein lokales Minimum in $x_1 = 3/4$, denn $f'(3/4) = 0$ und $f''(3/4) = 9/4 > 0$. □

Frage: Gibt es weitere Wendepunkte?

6.2 Die Regeln von de l'Hospital

Ausgangsfrage: Wie berechnet man den Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

falls

- beide Funktionen gegen Null konvergieren, d.h.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

- beide Funktionen gegen Unendlich konvergieren, d.h.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$$

Beispiel: Sei $f(x) = x^2$ und $g(x) = x$. Dann gilt

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} x = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} x = \infty.$$

Die erste Regel von de l'Hospital.

Satz (Regel von de l'Hospital für $\frac{0}{0}$):
Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ *stetig differenzierbar, sei* $x_0 \in (a, b)$ *mit* $f(x_0) = g(x_0) = 0$ *und es gelte* $g(x) \neq 0$ *für* $x \neq x_0$*. Dann gilt*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

sofern der Grenzwert auf der rechten Seite existiert.

Beweis: Mit dem zweiten Mittelwertsatz gilt

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

für einen Punkt $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $\theta \in (0, 1)$ (d.h. θ liegt zwischen x und x_0). Konvergiert nun x gegen x_0, so konvergiert auch ξ gegen x_0, d.h.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

■

Weitere Regeln von de l'Hospital.

- Für einseitige Grenzwerte gilt

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{und} \quad \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Falls die rechte Seite gegen $+\infty$ oder $-\infty$ divergiert, d.h. falls gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty,$$

so gilt mit der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty.$$

- Wir betrachten nun uneigentliche Grenzwerte der Form

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{und} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

De l'Hospital für uneigentliche Grenzwerte.

Satz: *Seien* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *stetig differenzierbar mit* $g(x) \neq 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$. *Dann gilt*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

sofern der jeweilige Grenzwert auf der rechten Seite existiert.

Beweis: Mit dem Satz von de l'Hospital und der Substitution $y = 1/x$ folgt

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{y\to 0+} \frac{f(1/y)}{g(1/y)} = \lim_{y\to 0+} \frac{f'(1/y)(-1/y^2)}{g'(1/y)(-1/y^2)} \\ &= \lim_{y\to 0+} \frac{f'(1/y)}{g'(1/y)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.\end{aligned}$$

Den zweiten Teil der Aussage beweist man analog. ■

Die zweite Regel von de l'Hospital.

Satz (Regel von de l'Hospital für $\frac{\infty}{\infty}$):
Seien $f, g : (a, b) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ *stetig differenzierbar, sei* $x_0 \in (a, b)$, *und es gelte*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$$

sowie $g'(x) \neq 0$ *für* $x \neq x_0$. *Dann gilt*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

sofern der Grenzwert auf der rechten Seite existiert. □

Zwei Beispiele.

- **Beispiel 1:** Betrachte die sinc-Funktion $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ bei Null:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

- **Beispiel 2:**

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x \cdot \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2}}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-2}{x^2-1}}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2-1} = 2 \qquad \square
\end{aligned}$$

Ein weiteres Beispiel.

- **Beispiel 3:**

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x-\log(1+x)}{x\cdot\log(1+x)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\log(1+x)+\frac{x}{1+x}} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x}{(1+x)\log(1+x)+x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\log(1+x)+1+1}=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$\square$

6.3 Kurvendiskussion

Ziel: Feststellung des qualitativen und quantitativen (Werte-)Verhaltens einer gegebenen Funktion $y = f(x)$ mit Skizze des Graphen von f.

Dabei sollen (mindestens) folgende Punkte untersucht werden.

(1) Definitionsbereich, Wertebereich

(2) Symmetrien

(3) Pole (Singularitäten)

(4) Asymptotisches Verhalten (Verhalten im Unendlichen)

(5) Nullstellenbestimmung

(6) Bestimmung der (lokalen) Extrema

(7) Werteverhalten

(8) Bestimmung der Wendepunkte

(9) Skizze des Graphen

Erklärungen zur Kurvendiskussion.

Im folgenden bezeichne $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, eine Funktion.

- f ist symmetrisch zur y-Achse (bzw. f ist eine gerade Funktion), falls

$$f(-x) = f(x), \qquad \text{für alle } x \in D.$$

- f ist symmetrisch zum Ursprung (f ist eine ungerade Funktion), falls

$$f(-x) = -f(x), \qquad \text{für alle } x \in D.$$

- f besitzt einen (algebraischen) Pol in $x_0 \in D$, falls

$$f(x) = \frac{g(x)}{(x - x_0)^k}$$

  wobei $k \in \mathbb{N}$ (Ordnung des Pols) und $g : D \to \mathbb{R}$ stetig in x_0 mit $g(x_0) \neq 0$.
  Ist k ungerade, so ist der Pol ein Pol mit Vorzeichenwechsel.
  Ist k gerade, so ist der Pol ein Pol ohne Vorzeichenwechsel.

Weitere Erklärungen zur Kurvendiskussion.

- Eine Gerade $y = \alpha x + \beta$ heißt **Asymptote** von f für $x \to \pm\infty$, falls gilt

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - \alpha x - \beta) = 0$$

- Die Koeffizienten einer Asymptoten ergeben sich durch

$$\alpha = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \beta = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - \alpha x)$$

- **Werteverhalten:** Hierbei soll untersucht werden, in welchen Intervallen f
  - positiv (negativ)
  - (streng) monoton fallend bzw. (streng) monoton wachsend

  ist.

Beispiel zur Kurvendiskussion.

Betrachte die Funktion

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 4}{x^2}.$$

(1) Definitionsbereich: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

In $x_0 = 0$ ist f nicht stetig ergänzbar, denn $\lim_{x \to 0}(2x^2 + 3x - 4) = -4 \neq 0$.

(2) Symmetrien: keine, f ist weder achsensymmetrisch noch punktsymmetrisch.

(3) Pole: $x_0 = 0$ ist Pol ohne Vorzeichenwechsel, denn $\lim_{x \to 0\pm} f(x) = -\infty$.

(4) Asymptotik: Es gilt

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 + 3x - 4}{x^2} = 2,$$

und somit ist $y \equiv 2$ eine horizontale Asymptote.

Beispiel zur Kurvendiskussion (Fortsetzung).

Betrachte die Funktion

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 4}{x^2}.$$

(5) Nullstellen: Es gilt

$$f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x^2 + 3x - 4 = 0.$$

Somit sind $x_{1,2} = \frac{1}{4}(-3 \pm \sqrt{41})$ die beiden (einzigen) Nullstellen von f.

(6) Lokale Extrema: Es gilt

$$f'(x) = \frac{-3x + 8}{x^3} \quad \text{und} \quad f''(x) = \frac{6x - 24}{x^4}.$$

Somit liegt bei $x = \frac{8}{3}$ ein stationärer Punkt vor.
Weiterhin gilt $f''(\frac{8}{3}) = -\frac{27}{64} < 0$.
Daher hat f in $x = \frac{8}{3}$ ein strenges lokales Maximum mit $f(\frac{8}{3}) = \frac{41}{16} \approx 2.5625$.

Beispiel zur Kurvendiskussion (Fortsetzung).

Betrachte die Funktion

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 4}{x^2}.$$

(7) Werteverhalten: Es gilt

$$f(x) \begin{cases} > 0 & \text{für } -\infty < x < \frac{1}{4}(-3-\sqrt{41}) & \text{(positiv)} \\ < 0 & \text{für } \frac{1}{4}(-3-\sqrt{41}) < x < 0 & \text{(negativ)} \\ < 0 & \text{für } 0 < x < \frac{1}{4}(-3+\sqrt{41}) & \text{(negativ)} \\ > 0 & \text{für } \frac{1}{4}(-3+\sqrt{41}) < x < \infty & \text{(positiv)} \end{cases}$$

sowie

$$f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{für } \frac{8}{3} < x < \infty & \text{(streng monoton fallend)} \\ > 0 & \text{für } 0 < x < \frac{8}{3} & \text{(streng monoton wachsend)} \\ < 0 & \text{für } -\infty < x < 0 & \text{(streng monoton fallend)} \end{cases}$$

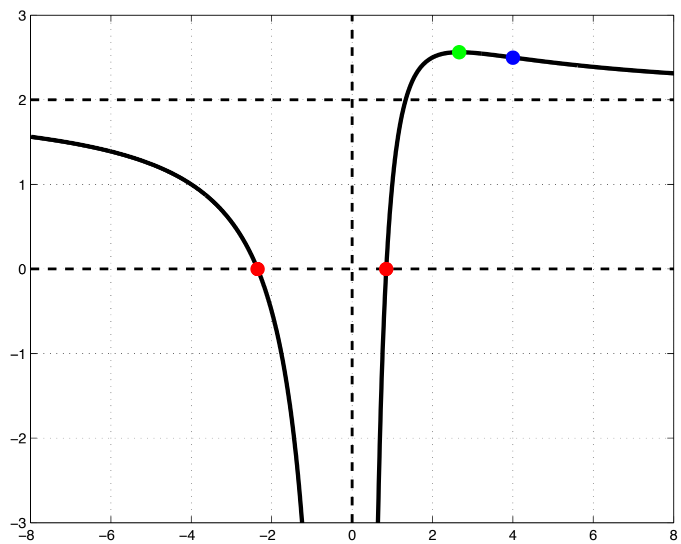
Beispiel zur Kurvendiskussion (Fortsetzung).

(8) Wendepunkte: Es gilt

$$f''(x) = \frac{6x - 24}{x^4} \quad \text{und} \quad f^{(3)}(x) = \frac{96 - 18x}{x^5}.$$

Somit gilt $f''(x) = 0$ für $x = 4$ mit $f(4) = \frac{5}{2}$. Weiterhin gilt $f^{(3)}(4) = \frac{3}{128} > 0$. Daher liegt bei $x = 4$ ein Wendepunkt mit Rechts-Linkskurve vor.

(9) Skizze:



Graph von $f(x) = \frac{2x^2+3x-4}{x^2}$.

6.4 Fixpunkt-Iteration

Ziel: Iterative Lösung der (nichtlinearen) Gleichung $f(x) = 0$.

Möglichkeiten:

- Bisektionsverfahren (Intervallhalbierung)
- Newton-Verfahren,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots,$$

Iteratives Verfahren: Fixpunkt-Iteration mit stetiger Verfahrensfunktion Φ und Startwert x_0 , so dass

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \qquad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots$$

mit Grenzwert

$$x^* = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} \Phi(x_k) = \Phi\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) = \Phi(x^*).$$

Grundidee der Fixpunkt-Iteration.

Löse statt $f(x) = 0$ das `Fixpunkt-Problem`

$$x = \Phi(x)$$

mit der `Fixpunkt-Iteration`

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \qquad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Beispiel: `Newton-Iteration`. Hierbei ist

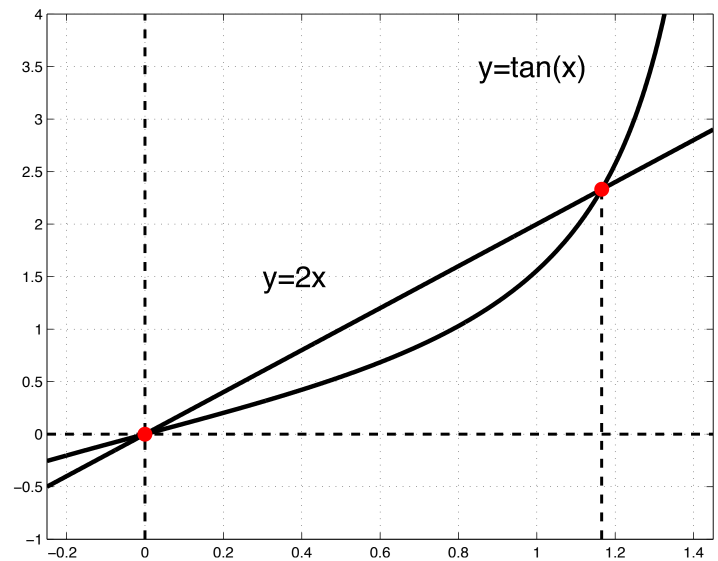
$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

ABER: Verfahrensfunktion Φ ist im Allgemeinen nicht eindeutig!

Beispiel.

Suche im Intervall $(0, \pi/2)$ die (eindeutige) Nullstelle von

$$f(x) = 2x - \tan(x).$$



Lösungsmöglichkeiten:

- Iteration mit $x = \frac{1}{2}\tan x = \Phi_1(x)$
- Iteration mit $x = \arctan(2x) = \Phi_2(x)$

Ergebnisse der beiden Fixpunkt-Iterationen.

- Betrachte Iterationen

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\tan(x_k) \quad \text{und} \quad y_{k+1} = \arctan(2y_k)$$

- Wähle als Anfangsnäherung in beiden Iterationen

$$x_0 = 1.2 \quad \text{und} \quad y_0 = 1.2$$

- Beide Iterationen konvergieren im Grenzwert für $k \to \infty$, aber

$$\lim_{k\to\infty} x_k = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} y_k = 1.1655\,61185$$

- Berechne die Iterationen mittels eines Computerprogramms

Bemerkung: Die Konvergenzgeschwindigkeit hängt ab vom Abstand

$$|x_{k+1} - x_k|$$

zweier benachbarter Folgenglieder.

Definition: *Sei* $(V, \|\cdot\|)$ *ein normierter Vektorraum. Eine Abbildung* $\Phi : D \to V$, $D \subset V$, *heißt* Lipschitz-stetig *auf* D, *falls eine Konstante* L *existiert, so dass*

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L\|x - y\| \qquad \text{für alle } x, y \in D.$$

Die Konstante L *nennt man* Lipschitz-Konstante. □

Definition: *Eine Abbildung* $\Phi : D \to V$, $D \subset V$, *heißt* kontrahierend, *falls* Φ *Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante* $L < 1$. *Man nennt in diesem Fall* L *die* Kontraktionskonstante *von* Φ. □

Bemerkungen:

- Jede Lipschitz-stetige Funktion ist stetig.
- Falls die Abschätzung

  $$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| < \|x - y\| \qquad \text{für alle } x \neq y$$

  gilt, so ist Φ nicht notwendigerweise kontrahierend. □

Beispiel: Die Betragsfunktion $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig auf $\mathbb{R}$ mit $L = 1$.

Satz: *Jede* C^1*-Funktion* $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ist Lipschitz-stetig auf* $[a, b]$ *mit der Lipschitz-Konstanten*

$$L = \sup\{|\Phi'(x)| \ : \ a \leq x \leq b\}.$$

Beweis: Aus dem Mittelwertsatz folgt

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = |\Phi'(\xi)|\,|x - y| \leq L\,|x - y| \qquad \text{für alle } x, y \in [a, b].$$

■

Beispiele:

- Die Sinusfunktion $\sin(x)$ ist Lipschitz-stetig auf $\mathbb{R}$ mit $L = 1$.
- Der Logarithmus $\log(x)$ ist Lipschitz-stetig auf $[1, \infty)$ mit $L = 1$.
- Die Exponentialfunktion $\exp(x)$ ist Lipschitz-stetig auf $(-\infty, 0]$ mit $L = 1$.
- Die Exponentialfunktion $\exp(x)$ ist **nicht** Lipschitz-stetig auf $[0, \infty)$.

Satz (Banachscher Fixpunktsatz):
Sei $(V, \|\cdot\|)$ *ein vollständiger normierter Raum (Banachraum). Weiterhin sei* $D \subset V$, $D \neq \emptyset$, *abgeschlossen und* $\Phi : D \longrightarrow D$ *eine kontrahierende Abbildung mit Kontraktionskonstante* $L < 1$. *Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Es gibt genau einen Fixpunkt* x^* *von* Φ *in* D, *d.h.* $\Phi(x^*) = x^*$;

(b) *Für jeden Startwert* $x_0 \in D$ *konvergiert die Fixpunkt-Iteration*

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \qquad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots$$

gegen den Fixpunkt x^*;

(c) *Es gilt die a priori-Fehlerabschätzung*

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{L^n}{1-L} \|x_1 - x_0\|;$$

und die a posteriori-Fehlerabschätzung

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{L}{1-L} \|x_n - x_{n-1}\|.$$

Beweis: **(b):** Sei $x_0 \in D$ beliebig. Dann gilt $x_k = \Phi(x_{k-1}) \in D$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Somit ist $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in D, wobei gilt

$$\|x_{k+1} - x_k\| = \|\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})\| \leq L\|x_k - x_{k-1}\|.$$

und somit

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq L^{k+1-n}\|x_n - x_{n-1}\| \qquad \text{für } k \geq n.$$

Für $m \geq n \geq k$ ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}
\|x_m - x_n\| &= \|(x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + \ldots + (x_{n+1} - x_n)\| \\
&\leq \sum_{k=n}^{m-1} \|x_{k+1} - x_k\| \leq \left(\sum_{k=n}^{m-1} L^{k+1-n}\right) \|x_n - x_{n-1}\| \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} L^j\right) \|x_n - x_{n-1}\| = \frac{L}{1-L}\|x_n - x_{n-1}\|.
\end{aligned}$$

Weiterhin

$$\|x_m - x_n\| \le \frac{L}{1-L}\|x_n - x_{n-1}\| \le \frac{L^n}{1-L}\|x_1 - x_0\|.$$

womit

$$\lim_{n\to\infty} \|x_m - x_n\| = \lim_{n\to\infty} \frac{L^n}{1-L}\|x_1 - x_0\| = 0.$$

$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ ist Cauchy-Folge mit Grenzwert $x^* \in D$, d.h. $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$.

Wegen der Stetigkeit von Φ und mit $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ folgt daraus $x^* = \Phi(x^*)$.

(a): Angenommen, es gäbe einen weiteren Fixpunkt $x^{**} \in D$, mit $x^* \neq x^{**}$. Dann folgt der Widerspruch

$$\|x^{**} - x^*\| = \|\Phi(x^{**}) - \Phi(x^*)\| \le L\|x^{**} - x^*\| < \|x^{**} - x^*\|.$$

(c): Folgt sofort mit

$$\|x^* - x_n\| = \lim_{m\to\infty} \|x_m - x_n\| \le \frac{L}{1-L}\|x_n - x_{n-1}\| \le \frac{L^n}{1-L}\|x_1 - x_0\|.$$

$\blacksquare$

Beispiel. Berechne Fixpunkt von $\Phi(x) = 0.1 \cdot \exp(x)$ auf $D = [-1, 1]$.

Überprüfe zunächst die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes:

- D ist nichtleer und abgeschlossen;
- es gilt $0 < \Phi(x) \leq 0.1 \cdot e < 1$ und somit $\Phi(D) \subset D$;
- es gilt $|\Phi'(x)| = \Phi(x) \leq e/10 < 1$ für alle $x \in D$;
- somit ist Φ kontrahierend auf D mit $L = e/10 < 1$.

Damit sind alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.

Berechne nun den Fixpunkt $x^* \in D$ von Φ mit der Iteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$.

Setze $x_0 = 1$. Dann bekommt man $x_1 = 0.2718281828\ldots$, und es gilt

$$|x_n - x^*| \leq \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|.$$

Für $\varepsilon = 10^{-6}$ bekommt man damit

$$|x_n - x^*| < \varepsilon \qquad \text{für } n \geq 11.$$

7 Potenzreihen und elementare Funktionen

7.1 Gleichmäßige Konvergenz

Definition: *Sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, *mit* $f_n : D \to \mathbb{C}$ *für* $D \subset \mathbb{C}^m$, *eine Funktionenfolge. Dann konvergiert die Folge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

- punktweise *gegen* $f : D \to \mathbb{C}$, *falls gilt*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z), \qquad \text{für alle } z \in D.$$

- gleichmäßig *gegen* $f : D \to \mathbb{C}$, *falls gilt*

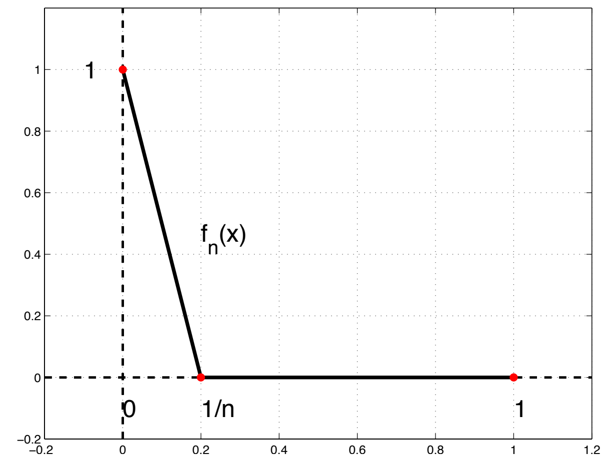
$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

□

Bemerkung: Aus gleichmäßiger Konvergenz folgt punktweise Konvergenz. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht. □

Gegenbeispiel. Betrachte die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stetiger Funktionen mit

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{für } 0 \leq x \leq 1/n, \\ 0 & \text{für } 1/n \leq x \leq 1. \end{cases}$$



Der Graph von $f_n(x)$.

Die Folge konvergiert *punktweise* gegen die *unstetige* Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0, \\ 0 & \text{für } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Allerdings konvergiert $(f_n)_n$ *nicht* gleichmäßig gegen f, denn es gilt

$$\|f_n - f\|_\infty = 1 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \qquad \square$$

Satz: *Falls eine Folge* $(f_n)_n$ *stetiger Funktionen* $f_n : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}^m$, *gleichmäßig auf* D *gegen* $f : D \to \mathbb{C}$ *konvergiert, so ist* f *stetig auf* D.

Beweis: Zeige die Stetigkeit von f in $z_0 \in D$. Sei dazu $\varepsilon > 0$ gegeben und n hinreichend groß, so dass

$$\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon/3.$$

Wähle $\delta > 0$ hinreichend klein, so dass

$$|f_n(z) - f_n(z_0)| < \varepsilon/3 \qquad \text{für alle } \|z - z_0\| < \delta.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &\leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $z \in D$ mit $\|z - z_0\| < \delta$. ∎

Das Majorantenkriterium von Weierstraß.

Satz: *Sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *eine Funktionenfolge mit* $f_n : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}^m$, *und gelte*

$$|f_n(z)| \leq b_n \quad \textit{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$$

für eine reelle Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. *Dann ist die Reihe*

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z), \qquad \textit{für } z \in D,$$

gleichmäßig und absolut konvergent auf D.

Beweis: Punktweise und absolute Konvergenz folgen aus dem Majorantenkriterium für Reihen. Die gleichmäßige Konvergenz folgt mit

$$\left| \sum_{n=0}^{m} f_n(z) - f(z) \right| \leq \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(z) \right| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} |f_n(z)| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} b_n < \varepsilon$$

und dem Cauchy-Konvergenzkriterium für unendliche Reihen. ■

Folgerung: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge stetiger Funktionen mit $f_n : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}^m$, so dass

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z), \qquad \text{für } z \in D,$$

gleichmässig konvergiert auf D. Dann ist f stetig auf D. $\square$

Vertauschbarkeit Differentiation und Summation.

Satz: *Sei* $(f_n)_n$ *eine Folge differenzierbarer Funktionen* $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$*, so dass*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad \textit{und} \quad g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x), \qquad \textit{für } x \in (a,b),$$

gleichmäßig konvergent auf (a,b) *sind. Dann ist die Funktion* f *differenzierbar auf* (a,b)*, und es gilt* $f' = g$*, d.h.*

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x) \qquad \textit{für alle } x \in (a,b).$$

$\square$