Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2018/19**
Prof. Dr. A. Iske
Dr. K. Rothe

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4

Aufgabe 13:

Man untersuche die folgenden rekursiv definierten Folgen auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert:

a) $a_1 = 1\,, \quad a_{n+1} = \dfrac{5 - 3a_n}{4}\,,$

b) $b_1 = 3,\ b_{n+1} = \dfrac{b_n^2 + 8}{6}\,,$

c) $c_1 = 2,\ c_{n+1} = \dfrac{13}{6 - c_n}\,,$

d) $d_1 = 2,\ d_{n+1} = \sqrt{6 + d_n}\,.$

Aufgabe 14:

Man untersuche die angegebenen Folgen auf Konvergenz

a) $\boldsymbol{x}_n = \left(\dfrac{3n}{3^n},\ \sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right),\ \dfrac{(-1)^n(n+1)}{n^2+1} \right)^T, \quad n \in \mathbb{N},$

b) $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x_n \cos y_n}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{3y_n \cos x_n}{4} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$

Hinweis: Eine geeignete Norm erleichtert das Leben.

Aufgabe 15:

a) Man stelle die reelle Zahl $x = 2.71\overline{82}$ unter Verwendung der Summenformel der geometrischen Reihe als Bruch dar.

b) Man berechne den Wert der folgenden Reihen, falls sie konvergieren:

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n}}{5^n}$, (ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n - 5^{n+1}}{6^{n+2}}$,

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$, (iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{6n+7}$.

Aufgabe 16:

a) Man zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 + 3 \cdot (-1)^n}{n+1}$$

alterniert und dass für $b_n := \dfrac{2 + 3 \cdot (-1)^n}{n+1}$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Warum ist das Leibniz-Kriterium nicht anwendbar?

b) Gegeben sei die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+3}}$.

(i) Man zeige, dass die Reihe konvergiert.

(ii) Wie groß ist der Fehler maximal, wenn man anstelle des Grenzwertes S der Reihe die Partialsumme S_0 verwendet?

(iii) Ab welchem Index k unterscheiden sich die Partialsummen

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+3}}$$

vom Grenzwert S der Reihe um weniger als 0.01?

(iv) Wie lauten die ersten zwei Nachkommastellen des Grenzwertes S?

Abgabetermin: 17.12. - 21.12.18 (zu Beginn der Übung)