Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2018/19**
Prof. Dr. A. Iske
Dr. K. Rothe

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3

Aufgabe 9:

a) Für die Binomialkoeffizienten mit $n, m, k \in \mathbb{N}$ und $k \leq m \leq n$ weise man folgende Beziehungen nach:

$$\binom{n}{m} \cdot \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m-k} .$$

b) Man bestimme für die Zahlen 119301 und 43010 den ggT und das kgV

(i) unter Verwendung des Euklidischen Algorithmus,

(ii) mit Hilfe der Primfaktorzerlegung.

Aufgabe 10:

a) Man überprüfe, ob folgende Mengen nach unten bzw. oben beschränkt sind und bestimme gegebenenfalls Infimum und Supremum

(i) $M_1 = [0, 20[\cap [10, \infty[$,

(ii) $M_2 = [1, 7[\cup \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{n^2}{3n+1} \, , \, n \in \mathbb{N} \right\}$.

b) Man zeige, dass die rekursiv definierte Fibonacci-Folge

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad \text{für } n \geq 1$$

mit den Anfangswerten $a_1 = 1$ und $a_2 = 1$ folgende explizite Darstellung für $n \in \mathbb{N}$ besitzt:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) .$$

Hinweis: Für den Beweis eignet sich die vollständige Induktion.

Aufgabe 11:

Man untersuche die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert:

$$a_n = \sqrt{4n^2 + 11n} - \sqrt{4n^2 - 3}\,, \qquad b_n = \sqrt[3]{\frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 2}{8n^3 + 4n^2 + 2}}\,,$$

$$c_n = \frac{n^2 + 3}{n - 1} - \frac{n^3 + 2}{n^2 + 4n}\,, \qquad d_n = \frac{(-1)^n + 15 \cdot 7^{n-1}}{10 \cdot 4^{n+2} - 3 \cdot 7^{n+1}}\,.$$

Aufgabe 12:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - x - 6$, sowie die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die sich aus dem Newton-Verfahren zur Nullstellenberechnung von f mittels Startwert $x_0 \geq 3$ ergibt.

a) Man zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Nullstelle x^* konvergiert und berechne diese.

b) Man zeige, dass die Folge (lokal) quadratisch konvergiert, d.h. es gibt eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit
$$|x_{n+1} - x^*| \leq c|x_n - x^*|^2\,.$$

Abgabetermin: 3.12. - 7.12.18 (zu Beginn der Übung)