Zahlenfolgen

Buch Kap. 2.4

Weitere Definitionen

1. Eine Folge (a_n) heißt **beschränkt**, wenn es $A, B \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $A \leq a_n \leq B$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
2. Satz 2.4 (Eigenschaften beschränkter Folgen nach **Bolzano-Weierstraß**).
   1. Jede beschränkte Folge (a_n) besitzt eine konvergente Teilfolge, oder äquivalent, (a_n) besitzt einen Häufungspunkt,
   2. Jede beschränkte monotone Folge (a_n) konvergiert.

Beispiele

Rekursive Folge: (a_n) mit $a_1 = 2$ und $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \forall n \geq 1$

$a_1 = 2$, $a_2 = \frac{1}{2}(2+1) = \frac{3}{2} = 1{,}5$, $a_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{17}{12} \approx 1{,}4166\ldots$

$a_4 = \frac{577}{408} \approx 1{,}41421\ldots$

Beispiel

$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) : n \geq 1 \quad , a_1 = 2$

1.) zeige: $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$: (Ind. nach n)

$n=1: \quad a_1 = 2 > 0 \quad ✓$

$n \to n+1: \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{a_n}_{>0} + \underbrace{\frac{2}{a_n}}_{>0}\right) > 0$

2.) Zeige: $a_n > \sqrt{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (Ind. nach n)

$n=1: \quad a_1 = 2 > \sqrt{2} \quad ✓$

$n \to n+1: \quad a_{n+1}^2 - 2 = \frac{1}{4}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)^2 - 2 = \frac{1}{4}a_n^2 + 1 + \frac{1}{a_n^2} - 2$

$= \frac{1}{4}a_n^2 - 1 + \frac{1}{a_n^2} = \left(\frac{1}{2}a_n - \frac{1}{a_n}\right)^2 > 0$

Also $a_{n+1} > \sqrt{2}$

3.) Zeige $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Sei $n \in \mathbb{N}$ bel.: $\quad 2 < a_n^2 \underset{(a_n>0)}{\Rightarrow} \frac{2}{a_n} < a_n \Rightarrow a_n + \frac{2}{a_n} < 2a_n$

$\Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) < a_n$

$$\boxed{\begin{array}{l}
\text{Grenzwertbestimmung} \\
a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \\
\qquad = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) \\
\Rightarrow a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) \Rightarrow a^2 = \frac{1}{2}a^2 + 1 \\
\Rightarrow \frac{1}{2}a^2 = 1 \Rightarrow a^2 = 2 \underset{(a>0)}{\Rightarrow} a = \sqrt{2}
\end{array}}$$

Zahlenfolgen

Buch Kap. 2.4

Konvergenz gegen unendlich

Die Folge (a_n) konvergiert gegen ∞, wenn

"Für alle $M > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $a_n > M$ für alle $n \geq N$",

also

$$\forall M > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \quad a_n > M \quad \forall n \geq N.$$

Notation: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, kurz $\lim a_n = \infty$.

Analoge Definition: (a_n) konvergiert gegen $-\infty$.

Zahlenfolgen

Buch Kap. 2.4

Beispiele

a) $(a_n) = (2^n)$.

Vorüberlegung: $2^n = (1+1)^n \geq 1 + 1 \cdot n$ (Bernoulli-Ungleichung)

Sei $M \in \mathbb{R}$. Sei $N \in \mathbb{N}$ mit $N > M-1$

Dann $a_n = 2^n \geq 1+n \geq 1+N > M \quad \forall\, n \geq N$

Also $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = \infty$

b) Analog gilt $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, wenn $q > 1$

c) $(a_n) = ((-2)^n) = (-2, 4, -8, 16, -32, \ldots)$ konv. ~~weder~~ gegen ∞ noch gegen $-\infty$.

d) $(a_n) = (-2^n) = (-2, -4, -8, -16, \ldots)$ konv. gegen $-\infty$.

Reihen

Definition (Reihe)

Sei (a_n) eine Folge. Dann heißt (s_n) mit $s_n := \sum_{i=0}^{n} a_i$ Reihe.

Eine Reihe heißt konvergent, wenn (s_n) konvergent ist. In dem Fall schreiben wir für $s = \lim_{n\to\infty} s_n$

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Wir sagen in dem Fall auch, dass $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert.

Frage

Wann konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k?$$

Reihen

Buch Kap. 3.1

Notwendig für Konvergenz

Wenn

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

konvergiert, dann $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Satz 3.2 (Monotoniekriterium)

Wenn $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und (s_n) beschränkt, dann (s_n) konvergent.

Satz 3.3 (Cauchy Kriterium):

(s_n) konvergent gdw es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ gibt mit, s.d.

$|\sum_{i=n+1}^{m} a_i| < \epsilon$ für alle $m > n \geq n_\epsilon$ erfüllt ist.