Folgen, Reihen und Konvergenz

Buch Kap. 2.4 – Folgen

Definition 2.12: (Zahlenfolge)

Eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $a_n = f(n)$, die jeder natürlichen Zahl genau eine reelle Zahl zuordnet, heißt Zahlenfolge.

Bezeichnungen:
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, oder $(a_1, a_2, \ldots)$ oder auch kurz mit (a_n)

a_n heißt das $n-$te Glied der Folge (a_n).

Beispiele

$\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$, $(2^n) = (2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots)$

(a_n) mit $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ $\forall n \geq 2$

$\shortparallel$

$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots)$ „Fibonacci-Folge"

Definition 2.14: (Konvergenz, Limes)

Die Folge (a_n) konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn

"Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq N$",

also

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \quad |a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq N.$$

Notation: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, kurz $\lim a_n = a$.

Beispiele

a) Wir zeigen, dass für $(\frac{1}{n})$: $(\frac{1}{n})$ konv. gegen 0, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Bew: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Sei $N \in \mathbb{N}$ s.d. $N > \frac{1}{\varepsilon}$.

Sei $n \geq N$. Dann gilt $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$.

b) $(a_n) = (1) = (1, 1, 1, 1, \dots)$. Sei $\varepsilon > 0$ bel. Dann gilt für $N = 1$:

Für $n \geq N$: $|a_n - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$.

Weitere Definitionen

1. Definition 2.15: (a_n) heißt CAUCHY-Folge, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall \quad m, n \geq n_0 \quad \text{gilt.}$$

2. Definition 2.17: $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \ldots \quad (n_k \in \mathbb{N})$ heißt Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Konvergiert eine Teilfolge gegen ξ, so heißt ξ Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Beispiele

$(a_n) = ((-1)^n) = (-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$

Diese Folge konv. nicht!

Teilfolge $(a_{2k}) = ((-1)^{2k}) = (1)$ konv. gegen 1

" $(a_{2k+1}) = ((-1)^{2k+1}) = (-1)$ konv. gegen -1

Also: 1 und -1 sind Häufungspunkte von $(-1)^n$

Zahlenfolgen

Buch Kap. 2.4

Vollständigkeitsaxion (Satz 2.3)

(a_n) konvergiert genau dann, wenn (a_n) CAUCHY-**Folge** ist.

Rechnen mit Limes (Satz 2.2)

1. $\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n$,
2. $\lim \alpha a_n = \alpha \lim a_n$,
3. $\lim(a_n b_n) = \lim a_n \lim b_n$,
4. $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$, falls $b_n \neq 0$ und $\lim b_n \neq 0$,
5. $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \lim a_n \leq \lim b_n$.

Beispiele

a) $$(a_n) = \left(\frac{2n^3 - 5n^2 + 2}{3n^3 + 1504} \right) = \left(\frac{\overset{\to 2}{2} - \overset{\to 0}{\frac{5}{n}} + \overset{\to 0}{\frac{2}{n^3}}}{\underset{\to 3}{3} + \underset{\to 0}{\frac{1504}{n^3}}} \right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - 5n^2 + 2}{3n^3 + 1504} = \frac{2}{3}$$

b) $$(a_n) = \left(\frac{10n^5 + 5}{0{,}1 \cdot n^6 + 8n + 1} \right) = \left(\frac{\frac{10}{n} + \frac{5}{n^6}}{0{,}1 + \frac{8}{n^5} + \frac{1}{n^6}} \right) \longrightarrow 0$$