Elementare Funktionen

Exponentialfunktion

Buch Kap. 2.3

Exponentialfunktionen

$$f(x) = a^x, \qquad a > 0,\ D = \mathbb{R}.$$

Ist $a = e$ (Eulerzahl $e = 2,71828\ldots$), sprechen wir von der "e-Funktion" $f(x) = e^x$.

Rechenregeln

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$,
- $(a^x)^y = a^{xy}$,
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.

Exponentialfunktion

Buch Kap. 2.3

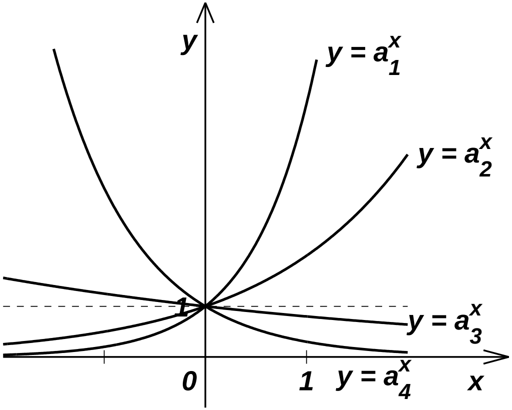


Abbildung 2.11: Exponentialfunktion $y = a^x$ zu Basen a_i
$(0 < a_4 < a_3 < 1 < a_2 < a_1)$

Logarithmus

Buch Kap. 2.3

Logarithmusfunktion

Für $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ ist mit
$D = [0, \infty)$

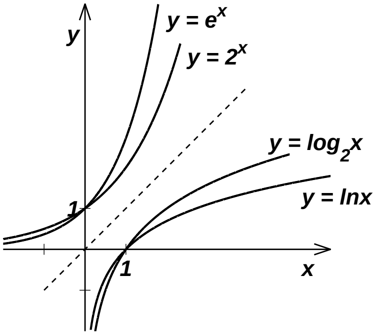
$$f(x) = \log_a x$$

definiert als die Zahl y mit der Eigenschaft $a^y = x$.

Ist $a = e$, so definieren wir

$$\log x = \ln x := \log_e x$$

den natürlichen Logarithmus.
Der Logarithmus ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.



Logarithmus

Rechenregeln

Es gilt

- $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$;
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$;
- $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a x$;
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$, insbesondere

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log y} = \frac{\ln x}{\ln y};$$

$$\log_2 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2} = \frac{\ln 5}{\ln 2}$$

- $\log_a(1) = 0$.

Potenzfunktion

Potenzfunktion

$$f(x) = x^\nu$$

- $\nu \in \mathbb{N}$: natürlicher Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$;
- $\nu \in \mathbb{Z}$, $\nu < 0$: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- $\nu \in \mathbb{R}$: $y = x^\nu := e^{\ln x^\nu} = e^{\nu \ln x}$, $D = \mathbb{R}_{>0}$.

Die Umkehrfunktionen zu $y = x^\nu$, $\nu \neq 0$, sind mit

$$y = x^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{x}$$

wiederum Potenzfunktionen.

Potenzfunktion

Buch Kap. 2.3

Potenzfunktion (Beispiele)

$f(x) = x^2 \qquad D = \mathbb{R}$

$f(x) = x^5 \qquad D = \mathbb{R}$

$f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x} \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2} \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \qquad D = \mathbb{R}_{\geq 0} = [0, \infty)$

$f(x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x} \qquad D = \mathbb{R}_{\geq 0} = [0, \infty)$

$f(x) = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad D = \mathbb{R}_{>0} = (0, \infty)$

Polynome...

sind Summen von Potenzfunktionen mit nichtnegativen Exponenten, d.h.

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdot + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Ist $a_n \neq 0$, so heißt n der Grad von p. Wir schreiben

$$n = \mathrm{Grad} p.$$

$p(x) = x^2 - 5x$ Grad $p = 2$

$p(x) = x^{15} - 1$ Grad $p = 15$

$p(x) = x + 1$ Grad $p = 1$

$p(x) = 1$ Grad $p = 0$

$p(x) = x + 1$, $q(x) = -x + 15$

Formeln: p, q Polynome

$\mathrm{Grad}(p \cdot q) = \mathrm{Grad}\, p + \mathrm{Grad}\, q$

$\mathrm{Grad}(p + q) \leq \max\{\mathrm{Grad}\, p, \mathrm{Grad}\, q\}$

$\mathrm{Grad}(0) := -\infty$

Gebrochen rationale Funktionen

Gebrochen rationale Funktionen...

... sind Polynombrüche

$$f(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)}, \quad D = \{x \in \mathbb{R} : q_m(x) \neq 0\}$$

mit den Polynomen $n-$ten bzw. $m-$ten Grades p_n und q_m. Ist $n < m$, heißt y echt gebrochen rationale Funktion oder echter Polynombruch.

Für $n \geq m$, heißt y unecht gebrochen rationale Funktion. Polynomdivision liefert dann

$$f(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)} = s_{n-m}(x) + r(x),$$

wobei s_{n-m} Polynom vom Grad $n - m$ und r echt gebrochen rational.

Gebrochen rationale Funktionen (Beispiele)

$$f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x+5} \qquad D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -5\} = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$$

$$f(x) = \frac{1}{x+3} \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

$$f(x) = \frac{x^2+3x+2}{2x+2} \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$= \frac{(x+1)(x+2)}{2(x+1)} = \frac{x}{2} + 1$$

$$f(x) = \frac{x}{2} + 1 = \frac{\frac{x}{2}+1}{1} \qquad D = \mathbb{R}$$

Polynomdivision

Polynomdivision (Beispiele)

$f(x) = \frac{x^5+2x^3-x+1}{x^2+1}$

$(x^5+2x^3-x+1) : (x^2+1)$

$D = \mathbb{R}$

$$(x^5+0x^4+2x^3+0x^2-x+1) : (x^2+0x+1) = x^3+x$$
$$\underline{-(x^5+0x^4+x^3)}$$
$$x^3+0x^2-x+1$$
$$\underline{-(x^3+0x^2+x)}$$
$$\underline{-2x+1} \quad \text{Rest}$$

Also

$$\frac{x^5+2x^3-x+1}{x^2+1} = x^3+x+\frac{-2x+1}{x^2+1}$$

$$(x^3+x)(x^2+1)+(-2x+1) = x^5+x^3+x^3+x-2x+1$$
$$= x^5+2x^3-x+1$$

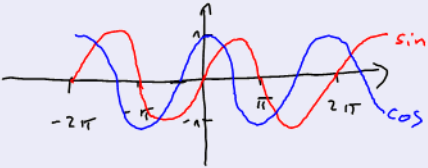
Trigonometrische Funktionen

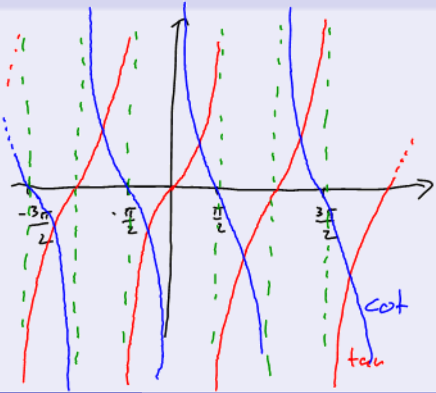
Buch Kap. 2.3

Sinus, Kosinus, Tangens, Kotangens...

$f(x) = \sin x,\ f(x) = \cos x$, $D = \mathbb{R}$, primitive Periode 2π;
$f(x) = \tan x$, $D = \mathbb{R} \setminus \{x = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$,
$y = \cot x$, $D = \mathbb{R} \setminus \{x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, primitive Periode π.

Graphen





Trigonometrische Funktionen

Einige Zusammenhänge

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.$$

$f(x) = \sin x,\ f(x) = \cos x$, $D = \mathbb{R}$, primitive Periode 2π;

$f(x) = \tan x$, $D = \mathbb{R} \setminus \{x = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$,

$f(x) = \cot x$, $D = \mathbb{R} \setminus \{x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, primitive Periode π.

Trigonometrische Funktionen

Buch Kap. 2.3

Umkehrfunktionen (Arkusfunktionen)

$y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $D = [-1, 1]$,
$y = \arctan x$, $y = \operatorname{arccot} x$, $D = \mathbb{R}$.

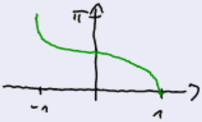
Graphen

sin : $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ bijektiv

arcsin : $[-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ „Arkussinus"

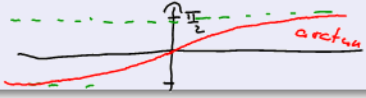
cos : $[0, \pi] \to [-1, 1]$ bij.

arccos $[-1, 1] \to [0, \pi]$ „Arkuskosinus"



tan : $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ bij

arctan : $\mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ „Arkustangens"

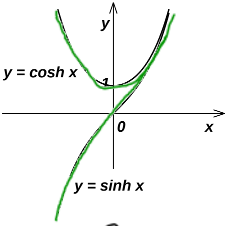


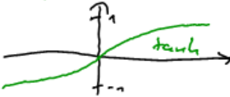
Hyperbelfunktionen

Buch Kap. 2.3

Hyperbelfunktionen

$$\begin{aligned}
\sinh x &:= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, & D = \mathbb{R},\ W = \mathbb{R}, \\
\cosh x &:= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, & D = \mathbb{R},\ W = [1, \infty), \\
\tanh x &:= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, & D = \mathbb{R},\ W = (-1, 1), \\
\coth x &:= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, & D = \mathbb{R} \setminus \{0\},\ W = \mathbb{R} \setminus [-1, 1].
\end{aligned}$$





Beachte

- sinh, tanh, coth ungerade,
- cosh gerade.

Areafunktionen

Buch Kap. 2.3

Definition

Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen heißen Areafunktionen.

$$y = \operatorname{arsinh} x$$

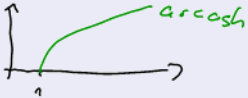
Sinh $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bij

bezeichnet etwa die Umkehrfunktion von $\sinh x$.

„area sinus hyperbolicus"

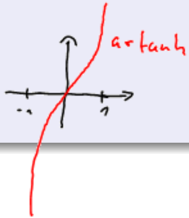
$\cosh: [0, \infty) \to [1, \infty)$ bij

$\operatorname{arcosh}: [1, \infty) \to (0, \infty)$



$\tanh: \mathbb{R} \to (-1, 1)$ bij

$\operatorname{artanh}: (-1, 1) \to \mathbb{R}$



Areafunktionen

Buch Kap. 2.3

Areafunktionen

Alle Areafunktionen lassen sich explizit durch Logarithmusfunktionen ausdrücken. Es gilt z.B.

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

$$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x}{2} - \frac{\frac{1}{e^x}}{2} \qquad z := e^x$$

$$= \frac{z}{2} - \frac{z^{-1}}{2}$$

$$\Rightarrow 0 = y + \frac{z^{-1}}{2} - \frac{z}{2} \Rightarrow yz + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{2} = 0 \Rightarrow z^2 - 2yz - 1 = 0$$

$$z_{1/2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1} \underset{z>0}{\Rightarrow} \overset{e^x}{\overset{\shortparallel}{z}} = y + \sqrt{y^2+1} \Rightarrow x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$