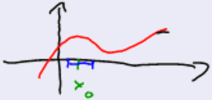
Umgebung

Definition

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt $x_0 \in I$

- lokales Maximum, wenn es eine Umgebung U von x_0 gibt, so dass

$$f(x_0) = \max_{x \in U \cap I} f(x);$$



- lokales Minimum, wenn es eine Umgebung U von x_0 gibt, so dass

$$f(x_0) = \min_{x \in U \cap I} f(x);$$

- lokales Extremum, wenn es ein lokales Maximum oder lokales Minimum ist.

Extremalprobleme

Buch Kap. 2.10

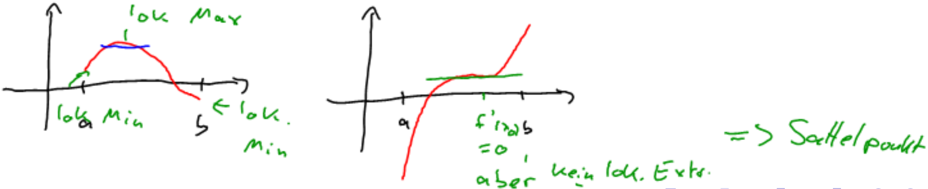
Satz 2.22: (notwendige Bedingung nach Leibniz), vergl. Satz 2.14

Für jede lokale Extremalstelle x_0 einer differenzierbaren Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ gilt

$$\text{a)} \;\; f'(x_0) = 0 \quad \text{oder} \quad \text{b)} \;\; x_0 \;\; \text{ist Randpunkt von} \;\; I.$$

Ist x_0 lokale Maximalstelle (Minimalstelle), so gilt

$$f'(x_0)(x - x_0) \leq 0 \; (\geq 0) \text{ für alle } x \text{ in einer Umgebung von } x_0,$$



Extremalprobleme

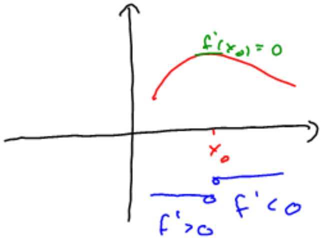
Buch Kap. 2.10

Satz 2.23: (hinreichende Bedingung für relative Extrema)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ auf einer Umgebung von x_0 zweimal stetig differenzierbar. Falls

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) > 0 \; (f''(x_0) < 0)$$

erfüllt ist, dann hat f in x_0 ein relatives Minimum (Maximum).



Beachte: Bedingung ist nicht notwendig, da $f(x) = x^4$

hat lok. Min. in $x_0 = 0$, aber $f''(0) = 0$

Extremalprobleme

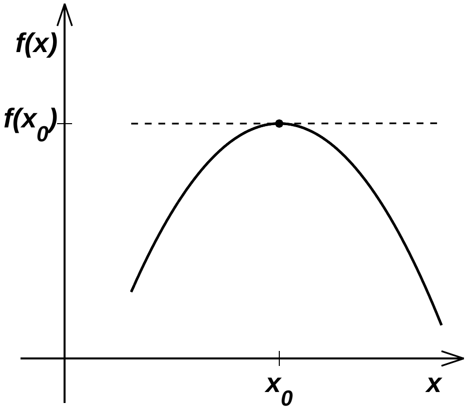


Abbildung 2.38: Maximum bei x_0 (mit $f'' < 0$)

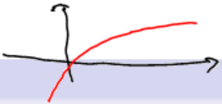
Monotonie

Monotonie

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar un sei $J \subset I$.

- Falls
$$f'(x) \geq (>) 0 \quad \text{für alle} \quad x \in J,$$
dann ist f auf J (streng) monoton wachsend.
- Falls
$$f'(x) \leq (<) 0 \quad \text{für alle} \quad x \in J,$$
dann ist f auf J (streng) monoton fallend.

Links- und Rechtskurven



Links- und Rechtskurven

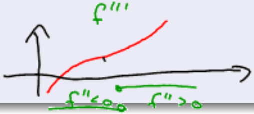
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und sei $J \subset I$.

- Falls f' auf J monoton fällt, dann macht der Graph von f eine Rechtskurve
$$\Leftarrow f''(x) < 0 \quad \text{für alle} \quad x \in J.$$
- Falls f' auf J monoton wächst, dann macht der Graph von f eine Linkskurve
$$\Leftarrow f''(x) > 0 \quad \text{für alle} \quad x \in J.$$

Wendepunkt

Den Wechsel von Links- auf Rechtskurve oder Rechts- auf Linkskurve in x_0 nennt man Wendepunkt

$$\Rightarrow f''(x_0) = 0.$$

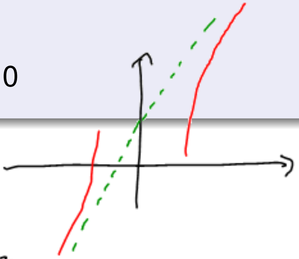


Asymptoten

Asymptoten

Sei f eine Funktion. Eine Gerade $y = \alpha x + \beta$ heißt **Asymptote** von $f(x)$ für $x \to \pm\infty$, falls gilt

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - \alpha x - \beta) = 0$$



Beispiel: $f(x) = \dfrac{2x^3 + x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

Polynomdivision

$$(2x^3 + x^2 - x + 1) : (x^2 + x + 1) = 2x - 1$$
$$\frac{-(2x^3 + 2x^2 + 2x)}{-x^2 - 3x + 1}$$
$$\frac{-(-x^2 - x - 1)}{-2x + 2}$$

Also: $-2x+2$ ist Asymptote von $f(x)$

$$\Rightarrow f(x) = 2x - 1 + \frac{-2x+2}{x^2+x-1} \quad \Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - (2x+2) = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{-2x+2}{x^2+x-1} = 0$$

Kurvendiskussion

Ziel

Feststellung des qualitativen und quantitativen (Werte-)Verhaltens einer gegebenen Funktion f mit Skizze des Graphen von f. Dabei sollen (mindestens) folgende Punkte untersucht werden.

1. Definitionsbereich, Wertebereich
2. Symmetrien
3. Pole
4. Asymptoti~~sche~~ en
5. Nullstellenbestimmung
6. Bestimmung der (lokalen) Extrema
7. Werteverhalten
8. Bestimmung der Wendepunkte
9. Skizze des Graphen

Kurvendiskussion

Beispiel

$$f(x) = \frac{2x^2+3x-4}{x^2}$$

Definitionsbereich $\quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Wertbereich $\quad \to$ später

Symmetrien: $\quad f(-x) = \frac{2x^2-3x-4}{x^2} \Rightarrow f$ weder gerade noch ungerade

Asymptotik: Es gilt $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 2 \Rightarrow y = 2$ ist Asymptote

Nullstellen:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 2x^2+3x-4 = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{3}{2}x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}+2} = -\frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{9+32}}{4}$$

$$= -\frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{41}}{4}$$

Kurvendiskussion

Beispiel

$$f(x) = \frac{2x^2+3x-4}{x^2}$$

lok. Extr.: $f'(x) = \frac{-3x+8}{x^3}$, $f''(x) = \frac{6x-24}{x^4}$, $f'''(x) = \frac{-18x+36}{x^5}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{8}{3}$ $\quad f''\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{16-24}{\left(\frac{8}{3}\right)^4} < 0 \Rightarrow$ lok. Max bei $x = \frac{8}{3}$

$$f\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{\frac{128}{9}+8-4}{\frac{64}{9}} = \frac{128+36}{64} = \frac{164}{64} = \frac{82}{32} = \frac{41}{16} \approx 2{,}56$$

Kurvendiskussion

Beispiel

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 4}{x^2}$$

Pole: $x = 0$ ist einziger Pol von f.

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 0-} f(x) = -\infty$$

Werteverhalten:

$f(x) > 0$: $-\infty < x < -\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{41}}{4}$

$f(x) < 0$: $-\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{41}}{4} < x < 0$

$f(x) < 0$: $0 < x < -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{41}}{4}$

$f(x) > 0$: $-\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{41}}{4} < x < \infty$

$f'(x) < 0$: $-\infty < x < 0 \Rightarrow f$ mon. fall.

$f'(x) > 0$: $0 < x < \frac{8}{3} \Rightarrow f$ mon. wachs.

$f'(x) < 0$: $\frac{8}{3} < x < \infty \Rightarrow f$ mon. fall.

Kurvendiskussion

Beispiel

Wendepunkte

$$f''(x) = \frac{6x-24}{x^4} \qquad f''(x) = 0 \Rightarrow x = 4$$

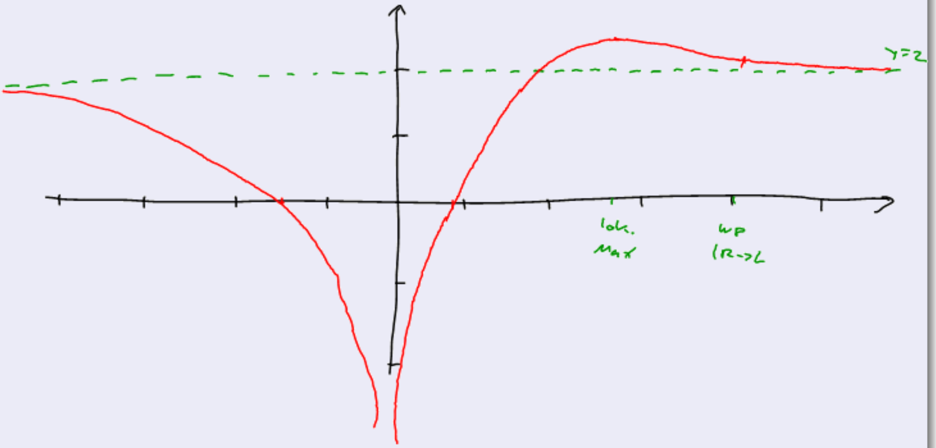
$$f'''(x) = \frac{-18x+96}{x^5} \qquad f'''(4) > 0$$

$\Rightarrow$ Wendepunkt in $x=0$, Wechsel von Rechts- auf Linkskurve

Kurvendiskussion

Beispiel

Skizze



Wertebereich $W = (-\infty, \frac{41}{16}]$