Reihen

Buch Kap. 3.1

Beispiel

Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

ist nicht konvergent.

„harmonische Reihe"

$$(1) + \left(\tfrac{1}{2}\right) + \underbrace{\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right)}_{\geq \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}\right)}_{\geq \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{14} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{16}\right)}_{\geq \frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\tfrac{1}{17} + \cdots\right.}_{\geq \frac{1}{2}}$$

$$(1) = 1 \geq \frac{1}{2}, \qquad \left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ ist unbeschränkt!}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\sum_{k=2^\ell+1}^{2^{\ell+1}} \frac{1}{k} \right) \geq 1 + \sum_{\ell=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=2^\ell+1}^{2^{\ell+1}} \frac{1}{2^{\ell+1}} \right)}_{= 2^\ell \cdot \frac{1}{2^{\ell+1}} = \frac{1}{2}}$$

$$= 1 + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2} \quad \text{divergiert}$$

Beispiel

Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

ist konvergent.

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots$$

$$\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$$

Also konv. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

Beispiel

Sei $q \in \mathbb{R}$. Betrachte die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k.$$

Zunächst $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $\forall\ q \neq 1$ „geometrische Summe"

Bei $|q| < 1$ gilt $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$ bei $|q|<1$

Also gilt für $|q| < 1$: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$

Bspw: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

Wenn $|q| \geq 1$, dann konv. (q^k) nicht gegen Null

$\Rightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konv. nicht bei $|q| \geq 1$!

Satz 3.4 (Leibniz Kriterium)

Sei (a_k) eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 \ldots .$$

Definition 3.3 (Absolute Konvergenz)

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergent ist.

Satz

Wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert, dann konvergiert sie auch.

Satz 3.4 (Leibniz Kriterium)

Sei (a_k) eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 \ldots .$$

Definition 3.3 (Absolute Konvergenz)

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergent ist.

Satz

Wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert, dann konvergiert sie auch.

Satz 3.4 (Leibniz Kriterium)

Sei (a_k) eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 \dots .$$

Definition 3.3 (Absolute Konvergenz)

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergent ist.

Satz

Wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert, dann konvergiert sie auch.

Beispiel

Betrachte die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots .$$

Konv. nach Leibniz-Krit.

Die Reihe konv. jedoch <u>nicht</u> absolut, da

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|(-1)^k \frac{1}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$ divergiert!

Satz 3.7 (Majorantenkriterium)

Ist $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ absolut konvergent und gilt $|b_k| \leq |a_k|$ für alle $k \geq n_0$ mit einem $n_0 \in \mathbb{N}$, so ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent.

Beispiele

Betrachte $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Wäre $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ konv.,

so wäre wegen $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$ auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ konv.

Ist aber nicht!