# Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

*Prof. Dr. Timo Reis*
Fachbereich Mathematik, Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg-Harburg
Wintersemester 2017/2018

# Allgemeine Informationen

# Informationsquellen

- **Internet**
  www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a1/1718
- **Vorlesung**
  Dienstag, 13:15–14:45, Audimax I, ab 24.10.2017
  + Videoübertragung in Räume H0.16 und H0.09
  BU, BVT, EUT, LUM, MB, MTB/MEC, SB, VT

  Donnerstag, 11:30–13:00, Audimax II, ab 26.10.2017
  AIW, ET, IN/ IIW
- **Übungen in Tutorgruppen**
  Dr. Hanna Peywand Kiani und Übungsgruppenleiter(innen)
- **Anleitung zu den Übungen** (14-täglich)
  Dr. Hanna Peywand Kiani.
  Montag, 14:45–16:15, Audimax 1, ab 13.11.2017
  Dienstag, 9:45–11:15, Audimax 1, ab 14.11.2017
- **Sprechstunde Prof. Reis**
  Dienstag, E 3.079, 10:00–11:00

# ... der Dozent
## zu meiner Person

| | |
|---|---|
| seit 2011 | Professor an der Uni Hamburg, FB Mathematik |
| 2010 - 2011 | Vertretungsprofessor hier an der TUHH |
| 2008 - 2009 | Gastwissenschaftler an der Rice University, Houston/Texas |
| 2005 - 2009 | wiss. Mitarbeiter an der TU Berlin |
| 2002 - 2006 | Dr. rer. nat. (Mathematik) an der TU Kaiserslautern |
| 1998 - 2002 | Studium (Mathematik mit Nebenfach Elektrotechnik) an der Uni Kaiserslautern |
| irgendwann davor | geboren in Trier (Rheinland-Pfalz) |

# ... der Dozent
## zu meiner Person

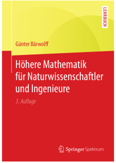
**Forschungsinteressen**

- mathematische Theorie der Regelung und Steuerung
- Anwendungen in der mechanischen Mehrkörperdynamik
- Simulation und Modellbildung elektrischer Schaltungen

# Literatur

**PRIMÄR:**

G. Bärwolff: **Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure**,
3. Auflage. Springer 2017
`http://www.springer.com/de/book/9783662550212`




**SEKUNDÄR:**

R. Ansorge, H. J. Oberle: Mathematik für Ingenieure 1,
3. Auflage. WILEY-VCH, 2000.

**FORMELSAMMLUNG:**

K. Vetters: **Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik**, Vieweg+Teubner, 2004

# Inhalt der Analysis I

1. Logik und Mengen
2. Abbildungen, Zahlen und vollständige Induktion
3. Folgen, Reihen und Konvergenz
4. Elementare Funktionen
5. Stetigkeit von Funktionen
6. Differenzierbarkeit und Differentiationsregeln
7. Mittelwertsätze, lokale Extrema, Satz von Taylor
8. Regel von de l’Hospital, Kurvendiskussion

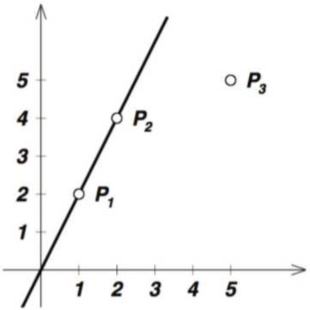
# Logik und Mengen

# Beispiel: Logische Aussagen

$A :=$ "625 ist durch 5, 25 und 125 teilbar"

$B :=$ "$x^2 + 1 = 0$ hat keine reelle Lösung"

$C :=$ "Die Punkte $P_1 = (1, 2)$, $P_2 = (2, 4)$ und $P_2 = (5, 5)$ liegen auf einer Geraden"



# Logische Aussagen

## Postulat

Eine Aussage kann entweder wahr oder falsch sein; ein Drittes gibt es nicht.

## Wahrheitswert des vorigen Beispiels:

$$\begin{aligned} \omega(A) &= W \\ \omega(B) &= W \\ \omega(C) &= F \end{aligned}$$

## Aussageform (Beispiel):

$A(x) :=$ “Die Punkte $P_1 = (1,2)$, $P_2 = (2,4)$ und $P_2 = (5,x)$ liegen auf einer Geraden”

**Man sieht (sofort):**
$A(10)$ ist wahr, also $\omega(A(10)) = W$.

# Logische Operationen

## Negation

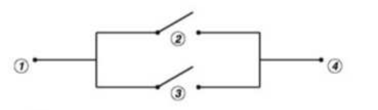
$\neg A$ ist definiert durch $\omega(\neg A) = F$, falls $\omega(A) = W$.

## Konjunktion $A \wedge B$:

$\omega(A \wedge B) = W$ genau dann, wenn $\omega(A) = W$ und $\omega(B) = W$.


## Disjunktion (Alternative) $A \vee B$

$\omega(A \vee B) = F$ genau dann, wenn $\omega(A) = F$ und $\omega(B) = F$.



# Logische Operationen (cont.)

## Implikation $A \Rightarrow B$

$\omega(A \Rightarrow B) = F$ genau dann, wenn $\omega(A) = W$ und $\omega(B) = F$.

## Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$

$\omega(A \Leftrightarrow B) = W$ genau dann, wenn $\omega(A) = \omega(B)$.

# Wahrheitswerttabellen

| $A$ | $\neg A$ |
|---|---|
| W | F |
| F | W |

| $A$ | $B$ | $A \wedge B$ | $A \vee B$ | $A \Rightarrow B$ | $A \Leftrightarrow B$ |
|---|---|---|---|---|---|
| W | W | W | W | W | W |
| W | F | F | W | F | F |
| F | W | F | W | W | F |
| F | F | F | F | W | W |

# Beispiel

## Aussage

$$C := (A \wedge (B \Rightarrow \neg A)) \Rightarrow \neg B$$

## Zugehörige Wahrheitswerttabelle

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $B \Rightarrow \neg A$ | $A \wedge (B \Rightarrow \neg B)$ | C |
|---|---|---|---|---|---|---|
| W | W | F | F | F | F | W |
| W | F | F | W | W | W | W |
| F | W | W | F | W | F | W |
| F | F | W | W | W | F | W |

Die Aussage $C$ ist immer wahr ("Tautologie").

# Indirekter Beweis

Die folgende Wahrheitswerttabelle ist gültig:

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $A \Rightarrow B$ | $\neg B \Rightarrow \neg A$ | $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| W | W | F | F | W | W | W |
| W | F | F | W | F | F | W |
| F | W | W | F | W | W | W |
| F | F | W | W | W | W | W |

# Mathematische Sätze und Beweistechniken.

Standardform eines Satzes:

$$A \quad \Longrightarrow \quad B, \qquad \text{für Aussagen } A, B,$$

wobei $A$ Voraussetzung und $B$ Behauptung heißt.

Mögliche Beweistechniken:

### Direkter Beweis (Kettenschluss)

$$A = A_0 \Longrightarrow A_1 \Longrightarrow A_2 \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow A_n = B$$

### Indirekter Beweis (Widerspruch)

Benutze

$$A \Longrightarrow B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \neg B \Longrightarrow \neg A$$

# Exemplarisches Beispiel für einen ersten Beweis.

## Satz

Eine natürliche Zahl $n$ ist genau dann gerade, wenn ihr Quadrat $n^2$ gerade ist, d.h. für alle natürlichen Zahlen $n$ gilt die Äquivalenz

$$n \text{ gerade} \qquad \Longleftrightarrow \qquad n^2 \text{ gerade.}$$

**Beweis:** Führe den Beweis in zwei Schritten:

Zeige

$$n \text{ gerade} \qquad \Longrightarrow \qquad n^2 \text{ gerade.}$$

Zeige

$$n^2 \text{ gerade} \qquad \Longrightarrow \qquad n \text{ gerade.}$$

## Vorüberlegungen

Eine nat. Zahl $n$ ist ...

... genau dann gerade, wenn $n = 2k$ für eine nat. Zahl $k$.

... genau dann ungerade, wenn $n = 2k - 1$ für eine nat. Zahl $k$.

## $n$ gerade $\Rightarrow$ $n^2$ gerade (direkter Beweis)

Sei $n$ gerade $\Rightarrow$ Es ex. nat. Zahl $k$, so dass $n = 2k$

$\Rightarrow$ $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ $\Rightarrow$ $n^2$ gerade

## $n^2$ gerade $\Rightarrow$ $n$ gerade (indirekter Beweis)

Angenommen, $n$ ungerade $\Rightarrow$ Es ex. nat. Zahl $k$, s.d. $n = 2k-1$

$\Rightarrow$ $n^2 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 2k + 1 = 2(2k^2 - k + 1) - 1$ $\Rightarrow$ $n^2$ ungerade

# Quantoren

... zur Abkürzung häufig benutzter Floskeln

**Quantoren**

- $\forall$ "für alle";
- $\exists$ "es existiert";

Sei $A(x)$ eine Aussageform. Dann definieren wir neue Aussagen wie folgt.

- $\forall x : A(x)$ "für alle $x$ gilt $A(x)$";
- $\exists x : A(x)$ "es gibt *mindestens* ein $x$, für das $A(x)$ gilt"

# Quantoren

Die Wahrheitswerte der einzelnen Aussagen werden entsprechend definiert:

$$\forall\, x : A(x) \iff \text{für alle } x \text{ gilt } A(x)$$

$$\exists\, x : A(x) \iff \text{es gibt } \textit{mindestens} \text{ ein } x, \text{ so dass } A(x)$$

## Negation von Quantoren

Es gilt

$$\neg\Big(\forall\, x : A(x)\Big) \iff \exists\, x : \Big(\neg A(x)\Big)$$

$$\neg\Big(\exists\, x : A(x)\Big) \iff \forall\, x : \Big(\neg A(x)\Big)$$

# Negation von Quantoren

**Beispiel:**

$A$ : Alle TU-Studierenden finden: „Mathematik ist langweilig"

$\neg A$ : Es existiert ein TU-Studierender, der/die Mathematik nicht langweilig findet.

## Definition

Eine Menge ist eine Kollektion von paarweise verschiedenen Objekten. Die einzelnen Objekte werden Elemente der Menge genannt.

## Beispiele

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ Menge der natürlichen Zahlen;
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ Menge der nicht-negativen ganzen Zahlen;
- Studierende der TUHH;
- Hörer der Analysis I im WiSe 2017/2018;
- Menge der Primzahlen.

## Notationen

Sei $M$ eine Menge.

$$
\begin{aligned}
a \in M &\iff a \text{ ist ein Element der Menge } M \\
a \notin M &\iff \neg(a \in M)
\end{aligned}
$$

# Mengen

**Beispiel:**

$$M = \{\text{rot}, \text{gelb}, \text{blau}\} = \{\text{gelb}, \text{blau}, \text{rot}\}$$
$$= \{\text{blau}, \text{blau}, \text{rot}, \text{rot}, \text{rot}, \text{gelb}, \text{rot}\}$$

(doppelte Aufzählung und Reihenfolge spielen keine Rolle!)

# Mengen

- Aufzählung der Elemente: $M := \{1, 2, 3, 4\}$
- Charakterisierende Eigenschaft der Menge, $M := \{x \in \Omega | A(x)\}$

## Bedeutung der verwendeten Symbole

| | |
|---|---|
| $:=$ | "wird definiert durch" |
| $A(x)$ | Aussageform, definiert für Elemente $x$ aus $\Omega$ |

## Teilmengen

$M \subset N$, wenn

$$\forall x : (x \in M \Longrightarrow x \in N)$$

## Gleichheit von Mengen

$M = N$, wenn

$$\forall x : (x \in M \Longleftrightarrow x \in N)$$

## Leere Menge

Menge, die kein Element enthält. Bezeichnung: $\emptyset$

## Eigenschaften

- $M \subset M$;
- $(M \subset N) \wedge (N \subset M) \quad \Longrightarrow \quad M = N$;
- $(M \subset N) \wedge (N \subset P) \quad \Longrightarrow \quad M \subset P$.

## Verknüpfung von Mengen

$$
\begin{array}{lcll}
M \cup N & := & \{x \,|\, x \in M \vee x \in N\} & \text{(Vereinigung)} \\
M \cap N & := & \{x \,|\, x \in M \wedge x \in N\} & \text{(Durchschnitt)} \\
M \setminus N & := & \{x \,|\, x \in M \wedge x \notin N\} & \text{(Differenz)} \\
M \times N & := & \{(a, b) \,|\, a \in M \wedge b \in N\} & \text{(Cartesisches Produkt)} \\
\mathcal{P}(\mathcal{M}) & := & \{X \,|\, X \subset M\} & \text{(Potenzmenge)}
\end{array}
$$

# Verknüpfung von Mengen

$M$ = Menge der Studierenden im Audimax II

$N$ = Menge der weiblichen Studierenden im Audimax II

$\Rightarrow N \subset M$

$M \setminus N$ : Menge der männlichen Studierenden im Audimax II

---

$M = \{1,2,3\}$ $\quad P(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

$N = \{\text{rot}, \text{gelb}\}$

$M \times N = \{(1,\text{rot}), (2,\text{rot}), (3,\text{rot}), (1,\text{gelb}), (2,\text{gelb}), (3,\text{gelb})\}$

# Weitere Bezeichnungen

- Gilt $M \cap N = \emptyset$, so nennt man $M$ und $N$ disjunkt.
- Verknüpfung von endlich vielen Mengen.

$$
\begin{aligned}
\bigcup_{k=1}^{n} A_k &= A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \\
&:= \{a \,|\, \exists\, i \in \{1, \ldots, n\} \,:\, a \in A_i\} \\
\bigcap_{k=1}^{n} A_k &= A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \\
&:= \{a \,|\, \forall\, i \in \{1, \ldots, n\} \,:\, a \in A_i\} \\
\prod_{k=1}^{n} A_k &= A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \\
&:= \{(a_1, \ldots, a_n) \,|\, \forall\, i \in \{1, \ldots, n\} \,:\, a_i \in A_i\}
\end{aligned}
$$

# Weitere Bemerkungen und Bezeichnungen.

## Für geordnete Paare bzw. $n$-Tupel gilt:

$$(a_1, a_2) = (b_1, b_2) \iff a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2$$
$$(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \iff \forall\, i \in \{1, \ldots, n\} : x_i = y_i$$

## Wichtige Cartesische Produkte

- die Euklidische Ebene

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$$

- der dreidimensionale Euklidische Raum

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \,|\, x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

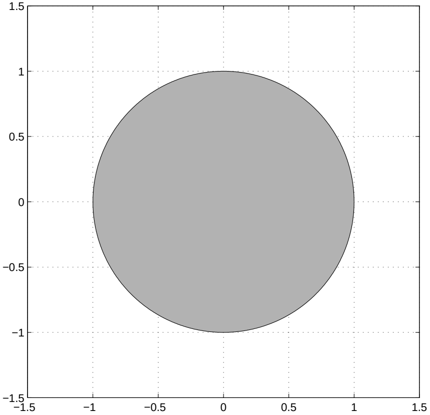
- der $n$-dimensionale Euklidische Raum

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}} = \{(x_1, \ldots, x_n) \,|\, x_i \in \mathbb{R}\}$$

# Der Einheitskreis

- Kreisscheibe mit Radius 1

$$A := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\right\}$$



# Zwei Streifen

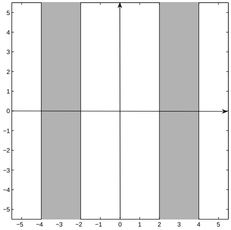
$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 5 \leq x^2 + 1 \leq 17\}$

## Beachte:

$$5 \leq x^2 + 1 \leq 17 \iff 4 \leq x^2 \leq 16 \iff -4 \leq x \leq -2 \vee 2 \leq x \leq 4$$

und somit gilt

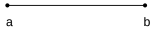
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -4 \leq x \leq -2 \vee 2 \leq x \leq 4\}.$$



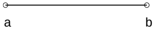
# Intervalle in $\mathbb{R}$.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

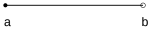
$[a, b] := \{x \mid a \le x \le b\}$ abgeschlossenes Intervall



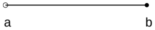

$(a, b) := \{x \mid a < x < b\}$ offenes Intervall




$[a, b) := \{x \mid a \le x < b\}$ halboffenes Intervall




$(a, b] := \{x \mid a < x \le b\}$ halboffenes Intervall




$[a, \infty) := \{x \mid a \le x\}$ $\quad$ $(-\infty, a] := \{x \mid x \le a\}$ $\quad$ $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

$(a, \infty) := \{x \mid a < x\}$ $\quad$ $(-\infty, a) := \{x \mid x < a\}$

# Abbildungen, Zahlen und vollständige Induktion

# Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$

Buch Kap. 1.4

## Peano: Axiome zur Charakterisierung der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen

1. 1 ist eine natürliche Zahl.
2. Jede natürliche Zahl n hat genau einen Nachfolger n' (Schreibweise 2=1', 3=2' usw.).
3. 1 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.
4. die Nachfolger zweier verschiedener natürlicher Zahlen sind voneinander verschieden (daraus folgt insbesondere, dass jede natürliche Zahl außer 1 genau einen Vorgänger hat).
5. Induktionsprinzip: Sei $A \subset \mathbb{N}$ mit
   (i) $1 \in A$,
   (ii) $n \in A \Longrightarrow n' \in A$.
   Dann ist $A = \mathbb{N}$.

Notation: $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

# Vollständige Induktion



## Prinzip der vollständigen Induktion

Seien $n_0 \in \mathbb{N}$ und $A(n)$ eine Aussageform für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$.
Wenn die beiden Aussagen

1. $A(n_0)$ ist wahr,
2. für alle $k \in \mathbb{N},\ k \geq n_0 : \quad A(k)$ ist wahr $\Longrightarrow A(k+1)$ ist wahr

gelten, dann ist die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ wahr.

# Vollständige Induktion

## Beispiel 1 (Gaußsche Summenformel)

Zu zeigen ist die Aussage: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k := 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

## Beweis durch vollständige Induktion nach $n$:

Induktionsstart: $n = 1$: Es gilt $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ ✓

Induktionsschritt: $n \to n+1$: Es gelte $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \frac{(n+1)\cdot n + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$ ✓

## Beispiel 1 (Gaußsche Summenformel)

Zu zeigen ist die Aussage: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k := 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

## Direkter Beweis:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-1) + n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + \ldots + 2 + 1$$

$$2 \sum_{k=1}^{n} k = (n+1) + (n+1) + (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1) = n \cdot (n+1)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

# Vollständige Induktion

## Beispiel 2 (Bernoullische Ungleichung)

Zu zeigen ist die Aussage: Für alle $n \in \mathbb{N}$, $x > 0$ gilt

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

## Beweis durch vollständige Induktion nach $n$:

Induktionsanfang $n = 1$: $(1+x)^1 = 1 + x = 1 + 1\cdot x \geq 1 + 1\cdot x$ ✓

Induktionsschritt $n \to n+1$: Es gelte $(1+x)^n \geq 1 + nx$

Dann $(1+x)^{n+1} = \underbrace{(1+x)^n}_{\geq 1+nx} \cdot \underbrace{(1+x)}_{>0} \geq (1+nx)(1+x) = 1 + nx + x + \underbrace{nx^2}_{>0}$

$\geq 1 + nx + x = 1 + (n+1)x$ ✓

# Zurück zu $\mathbb{N}$



## Fundamentalsatz der Arithmetik (Primfaktorzerlegung)

Jede natürliche Zahl $n > 1$ lässt sich auf eine und nur eine Weise als Produkt endlich vieler Primzahlen darstellen, wenn man die Primzahlen der Größe nach ordnet.

## Beispiele:

$25 = 5 \cdot 5$ , $1504 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 17$

$5 = 5$ , $13 = 13$ , $81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

# Ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, \dots\}$

Buch Kap. 1.5

## Grundlegende Eigenschaft

Für jede gegebene $n, m \in \mathbb{Z}$ ist die Gleichung

$$n + x = m$$

nach $x$ auflösbar.

## Konsequenz:

$\mathbb{Z}$ abgeschlossen gegenüber Addition, Subtraktion und Multiplikation.

## Aber:

Nicht gegenüber Division, denn

Sucht man eine Lösung $x$ der Gleichung $nx = m$ für $n, m \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, so gibt es eine Lösung $x \in \mathbb{Z}$ nur dann, wenn $n$ ein Teiler von $m$ ist.

$\rightsquigarrow$ Erweiterung von $\mathbb{Z}$ notwendig.

# Rationale Zahlen



$$\mathbb{Q} = \left\{ q \mid q = \frac{a}{b},\ a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}$$

wobei

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \iff a_1 b_2 = a_2 b_1 .$$

Es gilt $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ (setze $b = 1$).

## Addition und Multiplikation in $\mathbb{Q}$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

## Kürzen

Wir können immer dafür sorgen, dass "$a, b$  teilerfremd" sind.

Grundlage dafür: Primfaktorenzerlegung von Zähler und Nenner. Es wird solange "gekürzt", bis in Zähler und Nenner nur noch unterschiedliche Primzahlen vorhanden sind.

# Rationale Zahlen



## Division

In $\mathbb{Q}$ hat die Gleichung $nx = m,\ (n, m \in \mathbb{Z},\ n \neq 0)$ eine Lösung $x = \frac{m}{n}$.

$$4 \cdot x = 50 \Rightarrow x = \frac{4}{50} = \frac{2}{25}$$

$$7 \cdot x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{7}$$

$$\frac{3}{7} + \frac{2}{25} = \frac{75+14}{175} = \frac{85}{175}$$

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{25} = \frac{6}{175}$$

# Rationale Zahlen



## Periodischer Dezimalbruch

$a \in \mathbb{Q} \to a$ darstellbar als unendlicher periodischer Dezimalbruch:

$$a = \sum_{n=0}^{m} z_{m-n} 10^{m-n} + \sum_{k=1}^{\infty} z_{-k} 10^{-k} \ , z_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

## Kurzform

$$a = z_m z_{m-1} \dots z_0, z_{-1} z_{-2} \dots$$

# Rationale Zahlen



## Beispiele

$$\begin{aligned}\frac{1}{7} =& 0,142857142857142857\ldots \\ =& 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3} + 8 \cdot 10^{-4} + 5 \cdot 10^{-5} + 7 \cdot 10^{-6} + ...\end{aligned}$$

Periode hier 142857.

$$\begin{aligned}\frac{90}{8} =& 11.25000\ldots \\ =& 1 \cdot 10^{1} + 1 \cdot 10^{0} + 2 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}.\end{aligned}$$

Periode hier 0.

# Reelle Zahlen

## Beachte

$x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$ existiert nicht!

## Begründung:

Angenommen, es ex. ein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$.
Seien $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $p, q$ teilerfremd, $q \neq 0$ und $x = \frac{p}{q}$.
$\Rightarrow 2 = x^2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2$ gerade $\Rightarrow p$ gerade
$\Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}$ s.d. $p = 2k \Rightarrow 4k^2 = (2k)^2 = p^2 = 2q^2 \Rightarrow 2k^2 = q^2$
$\Rightarrow q^2$ gerade $\Rightarrow q$ gerade. Also sind $p$ und $q$ durch 2 teilbar.
Dies ist ein Widerspruch zu $p, q$ teilerfremd!

Erweiterung von $\mathbb{Q}$ notwendig $\rightarrow$ Reelle Zahlen

# Reelle Zahlen



$$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ ist unendlicher Dezimalbruch}\}.$$

## Problematisch

Aufschreiben solcher nichtperiodischer Dezimalbrüche. Man kann nur Näherungen angeben, z.B.

$$1,41\ ;\quad 1,414\ ;\quad 1,4142\ ;\quad 1,41421\ \ldots$$

für $x = \sqrt{2}$, oder

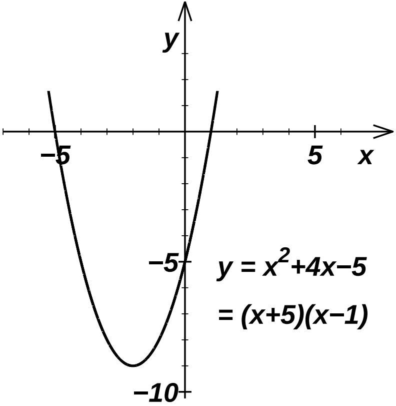
$$3,14\ ;\quad 3,141\ ;\quad 3,1415\ ;\quad 3,14159\ \ldots$$

für $x = \pi$ (später).

Beim Rechnen mit diesen nichtperiodischen Dezimalbrüchen muss man sich im Allg. auch auf Näherungswerte in Form endlicher Dezimalbrüche stützen.

# Komplexe Zahlen - Motivation

Buch Kap. 1.5



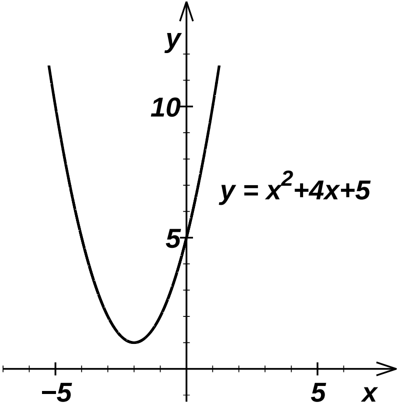




Abb. 1.22: Quadratische Gleichungen mit und ohne Lösungen in $\mathbb{R}$

Erweiterung von $\mathbb{R}$ notwendig $\rightarrow$ Komplexe Zahlen.

# Komplexe Zahlen



Wir wollen ein Zahlenmenge definieren, in dem jedes Polynom eine Nullstelle besitzt. Betrachte etwa $x^2 + 4x + 5 = 0$. Mit der “*pq*-Formel” ergibt sich

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{-1}.$$

**Frage**

Was ist

$$\sqrt{-1} \ ?$$

Bem: Eigentlich ist $\sqrt{-1}$ „bekloppt".

Begründung: $-1 = \sqrt{-1}^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$ ???

# Komplexe Zahlen



richtige Definition
(bitte nicht $\sqrt{-1}$ !)

## Imaginäre Einheit

Unter der imaginären Einheit versteht man den Ausdruck $i$.
Es gilt dabei

$$i^2 = -1.$$

## Komplexe Zahl

Unter einer **komplexen Zahl** $z \in \mathbb{C}$ versteht man einen Ausdruck der Form

$$z := a + b\,i \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

1. $a \in \mathbb{R}$ heißt Realteil von $z$ : $\quad a =: Re\, z$.
2. $b \in \mathbb{R}$ heißt Imaginärteil von $z$ : $\quad b =: Im\, z$.
3. Zwei **komplexe Zahlen sind gleich**, wenn sowohl Realteil als auch Imaginärteil übereinstimmen.

# Komplexe Zahlen

## Betrag und Konjugation

Gegeben sei eine komplexe Zahl

$$z := a + b\,i \in \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

1. $$\bar{z} = a - b\,i$$

   heißt die zu $z$ konjugiert komplexe Zahl.

2. Unter dem Betrag $|z|$ einer komplexen Zahl $z = a + b\,i$ versteht man die nichtnegative reelle Zahl $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

# Komplexe Zahlen

## Rechnen in $\mathbb{C}$

$$(1+2i) + (-5+3i) = -4+5i$$

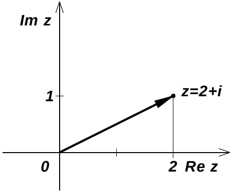
$$(1+2i)\cdot(-5+3i) = -5+3i+2i\cdot(-5)+2i\cdot 3i$$

$$= -5+3i-10i+6\underbrace{i^2}_{=-1} = -5-7i-6 = -11-7i$$

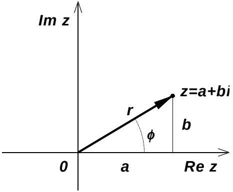
$$\frac{1+2i}{-5+3i} = \frac{(1+2i)(-5-3i)}{(-5+3i)(-5-3i)} = \frac{-5-10i-3i-6\overbrace{i^2}^{=-1}}{25+15i-15i-9\underbrace{i^2}_{=-1}} = \frac{1-13i}{34} = \frac{1}{34}-\frac{13}{34}i$$

mit konjugiert komplexen des Nenners erweitern

# Die GAUSSsche Zahlenebene Buch Kap. 1.7 (Abb. 1.23/1.24)




$z = 2 + i \in \mathbb{C}$ in GAUSSscher Ebene




Polarkoordinaten in GAUSSscher Ebene

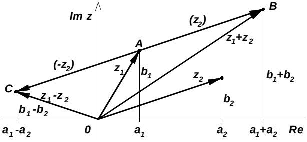
## Fakten

- Jeder Punkt $z \in \mathbb{C}$ der Gauß'schen Zahlenebene ist eindeutig charakterisiert durch eine Länge $r := |z|$ und einen Winkel $\text{Arg}z := \phi \in [0, 2\pi)$.
- Beachte, dass Winkel $\phi + 2k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$ bei gleichem $r$ dieselbe komplexe Zahl beschreiben.
- $z = r\,(\cos\phi + i\sin\phi)$.

# Die GAUSSsche Zahlenebene

Buch Kap. 1.7.2

$z = a + b\,i$ kann in Gauß'scher Ebene durch Vektor $0\vec{z}$ mit Komponenten $a, b$ dargestellt werden. Addition und Subtraktion entsprechen dann Addition und Subtraktion von Vektoren.




## Dreiecksungleichung

Aus dem Dreieck $0AB$ liest man ab:

$$|\overline{0B}| \leq |\overline{0A}| + |\overline{AB}|\ , \qquad \text{also} \qquad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|\ .$$

Ebenso gilt im Dreieck $0AC$

$$|\overline{0C}| \geq |\overline{AC}| - |\overline{0A}| \quad \text{und}$$
$$|\overline{0C}| \geq |\overline{0A}| - |\overline{AC}|\ , \quad \text{also} \quad |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$

# Komplexe Zahlen in Polarkoordinaten

Buch Kap. 1.7.2

## Polarkoordinaten

Sei $z = a + b\,i$. Dann gilt mit $r := |z|$

$$a = r\cos\phi\,,\ b = r\sin\phi\,,\ r = \sqrt{a^2 + b^2}\,,\ \tan\phi = \frac{b}{a} \quad (a \neq 0).$$

## Multiplikation und Division

Für $z = |z|(\cos\ \phi + i\ \sin\ \phi)$ und $w = |w|(\cos\ \psi + i\ \sin\ \psi)$ in Polarkoordinatendarstellung ergibt sich

$$z \cdot w = |z||w|(\cos(\phi + \psi) + i\ \sin(\phi + \psi)).$$

Für die Division zweier komplexer Zahlen $z$ und $w$ ($|w| \neq 0$) ergibt sich

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(\phi - \psi) + i\ \sin(\phi - \psi)),$$

# Komplexe Zahlen in Polarkoordinaten

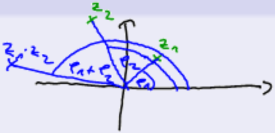
Buch Kap. 1.7.2

## Konsequenz

- Bei Multiplikation zweier komplexer Zahlen multiplizieren sich die Beträge und addieren sich die Winkel.
- Bei Division zweier komplexer Zahlen dividieren sich die Beträge und subtrahieren sich die Winkel.

## Beispiele

$z_1 = 1+i \quad , \; z_2 = -1+2i$




$z_1 \cdot z_2 = (1+i)(-1+2i) = -1+2i-i-2 = -3+i$