ANALYSIS I

J. Behrens

31. 01. 2017

① $\mathbb{C}$ als Zahlenkörper:

Für "+":

<u>Assoz.:</u> $(a_1,b_1)+[(a_2,b_2)+(a_3,b_3)] =$

$= (a_1,b_1)+(a_2+a_3, b_2+b_3)$

$= (a_1+a_2+a_3, b_1+b_2+b_3)$

$= (a_1+a_2, b_1+b_2)+(a_3,b_3)$

$= [(a_1,b_1)+(a_2,b_2)] + (a_3,b_3)$

<u>Kommut.:</u> $(a_1,b_1)+(a_2,b_2) = (a_2,b_2)+(a_1,b_1)$

<u>Nullelem.:</u> $(0,0)$

<u>Negatives:</u> zu (a,b) ist $-(a,b)$ das Negative.

Für "·":

Assoz.: $(a_1,b_1)\cdot[(a_2,b_2)\cdot(a_3,b_3)] = [(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2)]\cdot(a_3,b_3)$

Komm: $(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2) = (a_2,b_2)\cdot(a_1,b_1)$

Einselem: $(1,0)$: $(a,b)\cdot(1,0) = (a,b)$

Inverses: Es soll gelten $(a,b)\cdot(x,y) = (1,0)$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} ax - by &= 1 \\ bx + ay &= 0 \end{aligned}\right\}$$ (lin. Gleichungssystem (2x2))

Annahme $b\neq 0$: $x = -\frac{a}{b}y$ (2. Gl.)

$$\Rightarrow \left(-\frac{a^2}{b} - b\right)y = 1$$

$$\Rightarrow y = -\frac{b}{a^2+b^2}, \quad x = \frac{a}{a^2+b^2}$$

Annahme $a\neq 0$: analog

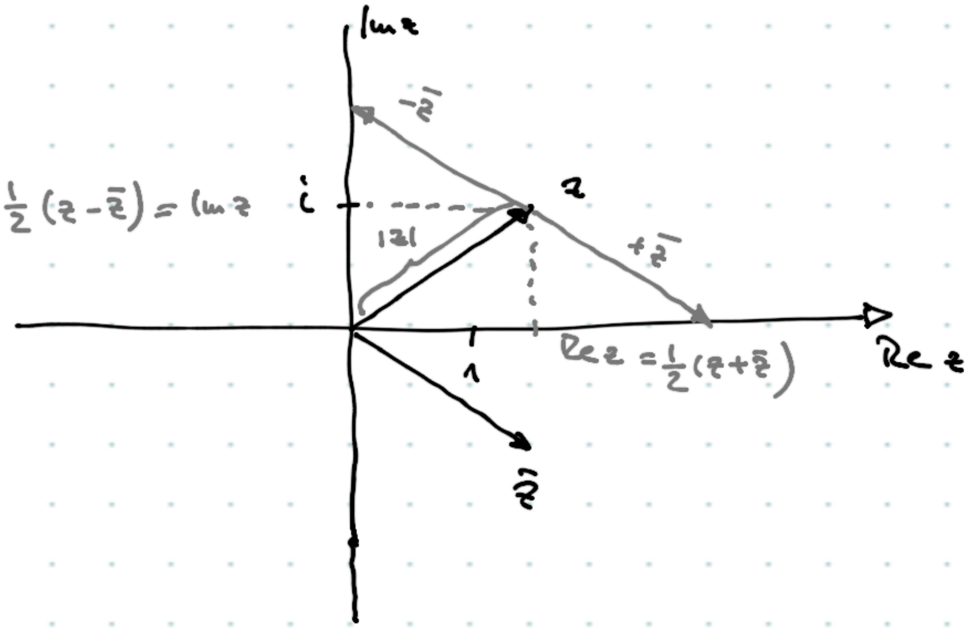
$$\Rightarrow (a,b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$$ falls $(a,b)\neq(0,0)$

Für "+·":

Distributiv.:

$$[(a_1,b_1)+(a_2,b_2)]\cdot(a_3,b_3) = (a_1,b_1)\cdot(a_3,b_3) + (a_2,b_2)\cdot(a_3,b_3)$$

② Geometrische Interpretation Re z, Im z:



③ Motivation für Potenzen/Wurzeln:

<u>Bsp:</u> $z = 2 + i2$, gesucht: $z^{12} = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{12\text{-mal}}$

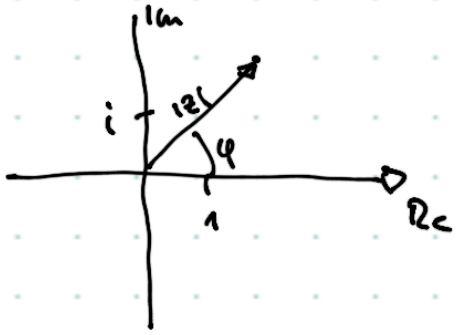
mühsam ☹ ↯

<u>Idee</u>: Benutze die exp-Darstellung

$$z = |z|\, e^{i\varphi}$$ mit $z = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ in Polarkoord.

$|z| = \sqrt{8}$

$\varphi = \frac{\pi}{4}$



Damit: $z^{12} = \left(|z| e^{i\varphi}\right)^{12} = \left(\sqrt{8}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{12}$

$$= (\sqrt{8})^{12} \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{12} = 8^6 e^{i 3\pi}$$

$$= 8^6 \left(\overbrace{\cos(3\pi)}^{=-1} + i \overbrace{\sin(3\pi)}^{=0} \right)$$

$$= -8^6 = -2^{18}$$

Wurzel: $z^3 = w = -3 + \sqrt{3} \cdot i$

Exponentialdarstellung: $|w| = \sqrt{12}$, $\operatorname{Arg} w = \varphi = \frac{5\pi}{6}$

$$\Rightarrow w = \sqrt{12}\, e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

oder $\boxed{w = \sqrt{12}\, e^{i\left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right)}}$ (*)

Def: $a \in \mathbb{C}$ heißt n-te Wurzel von $b \in \mathbb{C}$, falls

$$a^n = b.$$

Schreibe $a = \sqrt[n]{b}$.

Jetzt: $z_k = (\sqrt{12})^{\frac{1}{3}} \left(e^{i\left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right)}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$= 12^{\frac{1}{6}}\, e^{i\left(\frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\right)}$$

z_k ist Lösung der Gleichung $z_k^3 = w$

Nun ist $z_0 = z_3 = z_6 = \cdots$, $z_1 = z_4 = z_7 = \cdots$, $z_2 = z_5 = z_8 = \cdots$

Es gibt also drei verschiedene Lösungen z_0, z_1, z_2 zu

$$z^3 = w.$$

Analysis I

02.02.2017

① $\mathbb{C}$ als Zahlenkörper:

Betrachte "+":

- Assoziativ: $(a_1,b_1)+[(a_2,b_2)+(a_3,b_3)]$

$$= (a_1,b_1)+[(a_2+a_3, b_2+b_3)]$$
$$= (a_1+a_2+a_3, b_1+b_2+b_3)$$
$$= (a_1+a_2, b_1+b_2)+(a_3,b_3)$$
$$= [(a_1,b_1)+(a_2,b_2)]+(a_3,b_3)$$

- Kommutativ: $(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_2,b_2)+(a_1,b_1)$
- Nullelem.: $(0,0)$ ist Nullelement
- Negatives: $-(a,b)$ ist neg. Element zu (a,b)

Betrachte "·":

- Assoziativ: $(a_1,b_1)\cdot[(a_2,b_2)\cdot(a_3,b_3)]=[(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2)]\cdot(a_3,b_3)$
- Kommut.: $(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2) = (a_2,b_2)\cdot(a_1,b_1)$

• Einselem: $(a,b)\cdot(1,0) = (a,b)$

• Inverses: Es soll gelten: $(a,b)\cdot(x,y) = (1,0)$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} ax - by &= 1 \\ bx + ay &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ lin. Gleichungssystem } (2\times 2)$$

Annahme $b \neq 0$: $\quad x = -\frac{a}{b}y \quad$ (2. Gl.) $\Rightarrow \left(-\frac{a^2}{b} - b\right)y = 1$

$$\Rightarrow y = -\frac{b}{a^2+b^2}, \quad x = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

Für $a \neq 0$ analog.

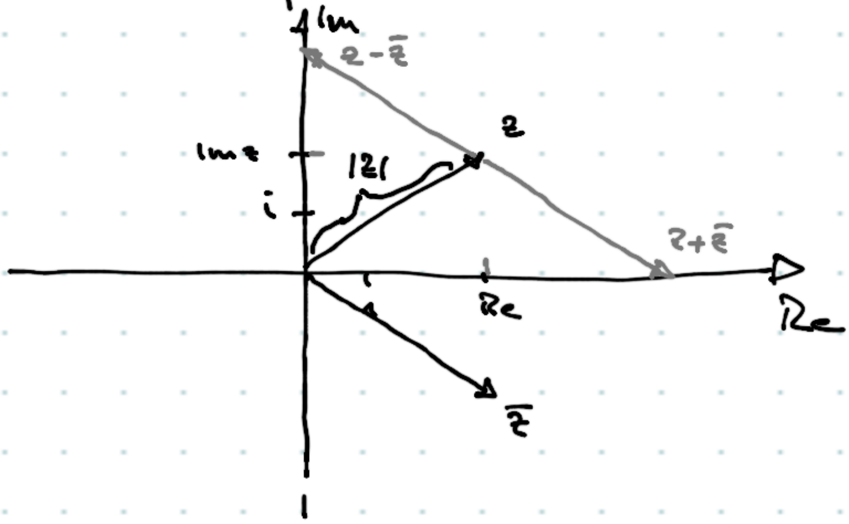
$$\Rightarrow (a,b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

falls $(a,b) \neq (0,0)$

Betrachte "$+\cdot$":

$$[(a_1,b_1)+(a_2,b_2)]\cdot(a_3,b_3) = (a_1,b_1)\cdot(a_3,b_3) + (a_2,b_2)\cdot(a_3,b_3)$$

2 Geometrische Interpretation Re z / Im z



③ Potenzen / Wurzeln:

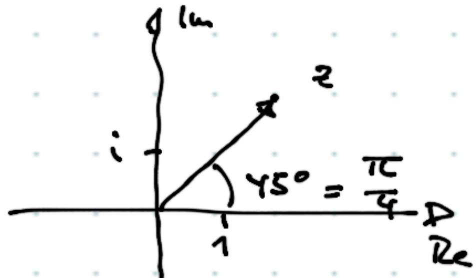
<u>Beispiel</u>: $z = 2 + i2$, gesucht: $z^{12} = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{12\text{-mal}}$

zu mühsam ☹

<u>Idee</u>: Bemühe Exponentialschreibweise:

$$z = |z| e^{i\varphi} = |z| (\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

Wir haben: $|z| = \sqrt{8}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$



<u>Damit</u>:
$$z^{12} = \left(\sqrt{8}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{12}$$
$$= (\sqrt{8})^{12} \cdot \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{12}$$
$$= 8^6 \cdot e^{i3\pi} = 8^6 (\underbrace{\cos 3\pi}_{=-1} + i \underbrace{\sin 3\pi}_{=0})$$
$$= -8^6 = -2^{18}$$

<u>Wurzel</u>: $z^3 = w = -3 + \sqrt{3}\, i$

Wieder bemühen wir die Exponentialdarst.: $|w| = \sqrt{12}$

$\varphi = \frac{5\pi}{6} = \operatorname{Arg} z$

Schreibe $w = \sqrt{12} \cdot e^{i\left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right)}$

<u>Def</u>: $a \in \mathbb{C}$ heißt <u>n-te Wurzel</u> von $b \in \mathbb{C}$, falls $a^n = b$.

Schreibe $a = \sqrt[n]{b}$.

Jetzt: $z_k = (\sqrt{12})^{1/3} \left(e^{i\left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right)}\right)^{1/3} = 12^{\frac{1}{6}}\, e^{i\left(\frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\right)}$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

z_k ist Lösung von $z_k^3 = w$

Nun ist $z_0 = z_3 = z_6 = \cdots$

$z_1 = z_4 = z_7 = \cdots$

$z_2 = z_5 = z_8 = \cdots$

Also gibt es drei Lösungen z_0, z_1 und z_2 zu $z^3 = \omega$.