

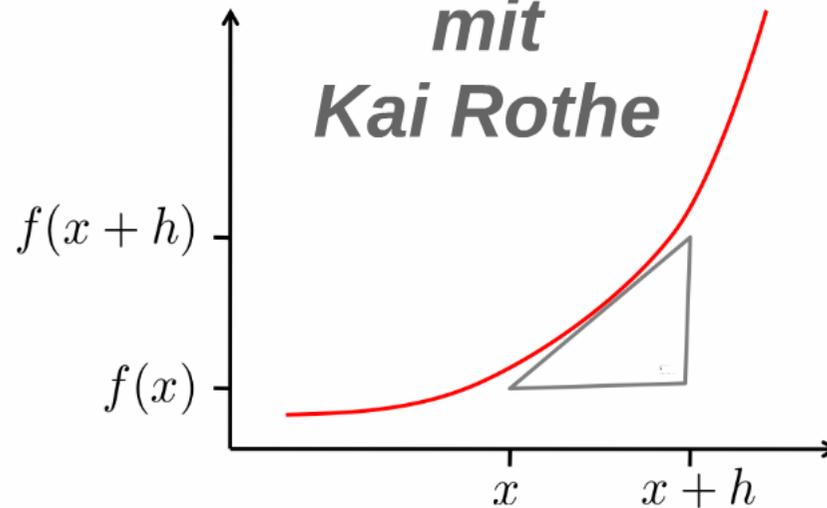
Analysis I

Winter 2016/17

Jörn Behrens

mit

Kai Rothe



Kurven (Fortsetzung)

Anwendung der Newton-Iteration

Buch Kapitel 2.11 und 2.12

Klausuren

Aktuelle Ankündigungen:

http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/klausuren/klausuren_mathe1.html



Mathematik I (Analysis I/Lineare Algebra I)

(Veranstalter/Prüfer "Analysis I": Prof. Dr. Jörn Behrens, Organisation: Dr. Kai Rothe)

Termine:	Do 23.02.2017 – Ort, Raum und Zeit: siehe TUHH > Prüfungstermine
Erlaubte Hilfsmittel:	In der Teilklausur "Analysis I" sind zugelassen: <ul style="list-style-type: none">- eine eigene Ausarbeitung/Stoffsammlung auf gelbem Papier von höchstens 4 Seiten (= 2 Blätter DIN A4, Vor- und Rückseite)- eigenes Papier zum Bearbeiten der Klausur sowie Stifte und Lineal <p>Andere Hilfsmittel als die angegebenen sind nicht erlaubt und auch elektronische Hilfsmittel sind nicht zugelassen ((Taschen-) Rechner u. a.). Das Mitführen von Handys in Klausuren ist grundsätzlich verboten. Zuwiderhandlungen werden als Täuschungsversuch gewertet.</p>
Beratung:	Analysis I: Mo 30.01.2017, 17:00–17:30 Uhr, SBC 5-H, Audimax I Di 31.01.2017, 10:45–11:15 Uhr, SBC 5-H, Audimax I Di 14.02.2017, 15:00–16:30 Uhr, Bundesstr. 55 (Geomatikum), Hörsaal 1 → PDF

Hinweis:

Wer die Übungsaufgaben lösen kann, kann auch die Klausuraufgaben lösen.

Erinnerung: Kurven

Definition

Definition: (Kurve im \mathbb{R}^2)
Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ und $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall. Jede Abbildung

$$\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow G, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

mit stetigen Komponentenfunktionen $x_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Kurvenstück** in G mit

- **Anfangspunkt** $\mathbf{x}(a) = (x_1(a), x_2(a))^T$,
- **Endpunkt** $\mathbf{x}(b) = (x_1(b), x_2(b))^T$,
- **Spur** $\{x(t) \mid a \leq t \leq b\}$.

Zur Darstellung der Kurvenpunkte aus dem \mathbb{R}^2 werden Spaltenvektoren verwendet:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Ein Kurvenstück heißt **regulär**, wenn für alle $t \in [a, b]$ gilt:

$$(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2 > 0.$$

Eine **Parametrisierung** des Kurvenstücks mit dem Parameter t ist gegeben durch

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Durch wachsende Werte des Parameters t ist für das Kurvenstück eine **Orientierung** gegeben.

Eine Anreihenfolge von Kurvenstücken K_1 ($t = 1 \rightarrow 2$), wobei der Anfangspunkt von K_2 dem Endpunkt von K_1 ($t = 2 \rightarrow 1$) entspricht, heißt **Kurve**.
Ist nur ein Kurvenstück vorhanden, wird es oft auch als Kurve bezeichnet.

Tangente, Normale, Bogendifferential

Definition:

- $\dot{\mathbf{x}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))^T$ heißt **Tangentenvektor**,
- $\mathbf{n}(t) = (-\dot{y}(t), \dot{x}(t))^T$ heißt **Normalenvektor**,

der Kurve $\mathbf{x}(t)$ im Punkt $(x(t), y(t))^T$.

Bogenlänge: (Bogendifferential)

$$ds := \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt.$$

heißt **Differential der Bogenlänge** (oder Bogenelement), wobei dt das Differential der unabhängigen Variablen t ist.

Definition

Definition: (Kurve im \mathbb{R}^2)

Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ und $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall. Jede Abbildung

$$\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow G, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $x_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Kurvenstück** in G mit

- **Anfangspunkt** $\mathbf{x}(a) = (x_1(a), x_2(a))^\top$,
- **Endpunkt** $\mathbf{x}(b) = (x_1(b), x_2(b))^\top$,
- **Spur** $\{\mathbf{x}(t) | a \leq t \leq b\}$.

Zur Darstellung der Kurvenpunkte aus dem \mathbb{R}^2 werden Spaltenvektoren verwendet:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2)^\top.$$

Ein Kurvenstück heißt **regulär**, wenn für alle $t \in [a, b]$ gilt:

$$(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2 > 0.$$

Eine **Parameterdarstellung** des Kurvenstücks mit dem Parameter t ist gegeben durch

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Durch wachsende Werte des Parameters t ist für das Kurvenstück eine **Orientierung** gegeben.

Eine Aneinanderreihung von Kurvenstücken K_i ($i = 1 : r$), wobei der Anfangspunkt von K_i dem Endpunkt von K_{i-1} ($i = 2 : r$) entspricht, heißt **Kurve**.

Ist nur ein Kurvenstück vorhanden, wird es oft auch als Kurve bezeichnet.

Tangente, Normale, Bogendifferential

Definition:

- $\dot{\mathbf{x}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))^{\top}$ heißt **Tangentenvektor**,
- $\mathbf{n}(t) = (-\dot{y}(t), \dot{x}(t))^{\top}$ heißt **Normalenvektor**,

der Kurve $\mathbf{x}(t)$ im Punkt $(x(t), y(t))^{\top}$.

Bogenlänge: (Bogendifferential)

$$ds := \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt.$$

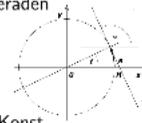
heißt **Differential der Bogenlänge** (oder Bogenelement), wobei dt das Differential der unabhängigen Variablen t ist.

Krümmung einer Kurve

Anschaulich:

Krümmung = Abweichung von Geraden

Also: Gerade habe die Krümmung 0 (Null).



Andererseits:

Krümmung einer Kreislinie = $K = \text{Konst.}$

Mathematisch (Motivation):

$$\text{Krümmung} = \kappa = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}$$

Definition (Mathematisch Formal):

Die **Krümmung** einer regulären Kurve $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))^T$, $t \in [a, b]$ mit zweimal stetig diff' baren Funktionen $x, y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beträgt im Punkt $P(t) = (x(t), y(t))^T$

$$\kappa(t) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\dot{x}(t)}{\sqrt{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^3}}$$

Falls die Kurve als Graph der zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\mathbf{x}(t) = (t, f(t))^T$ gegeben ist, ergibt sich

$$\kappa(t) = \frac{f''(t)}{\sqrt{(1 + (f'(t))^2)^3}}$$

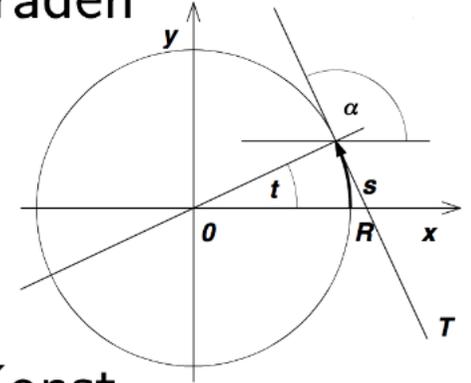
$R = \frac{1}{|\kappa|}$ heißt **Krümmungsradius**.

1

Anschaulich:

Krümmung = Abweichung von Geraden

Also: Gerade habe die Krümmung 0 (Null).



Andererseits:

Krümmung einer Kreislinie = $K = \text{Konst.}$

Mathematisch (Motivation):

$$\text{Krümmung} = \kappa = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}$$

Definition (Mathematisch Formal):

Die **Krümmung** einer regulären Kurve $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))^{\top}$, $t \in [a, b]$ mit zweimal stetig diff'baren Funktionen $x, y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beträgt im Punkt $P(t) = (x(t), y(t))^{\top}$

$$\kappa(t) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\dot{x}(t)\dot{y}(t) - \dot{y}(t)\dot{x}(t)}{\sqrt{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^3}}.$$

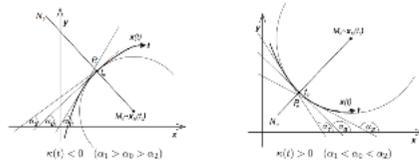
Falls die Kurve als Graph der zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\mathbf{x}(t) = (t, f(t))^{\top}$ gegeben ist, ergibt sich

$$\kappa(t) = \frac{f''(t)}{\sqrt{(1 + (f'(t))^2)^3}}.$$

$R = \frac{1}{|\kappa|}$ heißt **Krümmungsradius**.

Eigenschaften der Krümmung

Bemerkung (positive und negative Krümmung):
 Durch wachsendes t (bzw. wachsende Bogenlänge $s(t)$) ist eine Orientierung der Kurve gegeben.
 Die Krümmung $\kappa(t)$ ist in einem Punkt $P_0 = (x(t_0), y(t_0))^T$ positiv bzw. negativ, falls der Anstieg $\alpha(t)$ der Tangenten wächst oder fällt.



Bemerkungen (Krümmungsmittelpunkt):

- Der Mittelpunkt M_0 des Krümmungskreises heißt **Krümmungsmittelpunkt**.
- Die Koordinaten $(x_M(t), y_M(t))^T$ von M_0 sind gegeben durch:

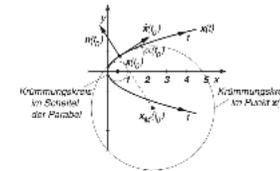
$$x_M(t) = x(t) - \frac{y'(t)^2 + y''(t)}{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}$$

$$y_M(t) = y(t) + \frac{x'(t)^2 + x''(t)}{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}$$

Bemerkung (Krümmungskreis):

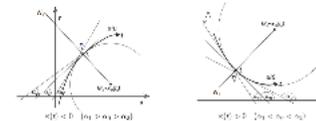
Der **Krümmungskreis** einer Kurve im Punkt P_0 ist der Kreis,

- der durch P_0 geht,
- dessen Radius gleich dem Krümmungsradius ist: $R(t_0) = \frac{1}{|\kappa(t_0)|}$, und
- dessen Mittelpunkt M_0 auf der durch P_0 gehenden Normalen N_0 liegt.



Beobachtungen:

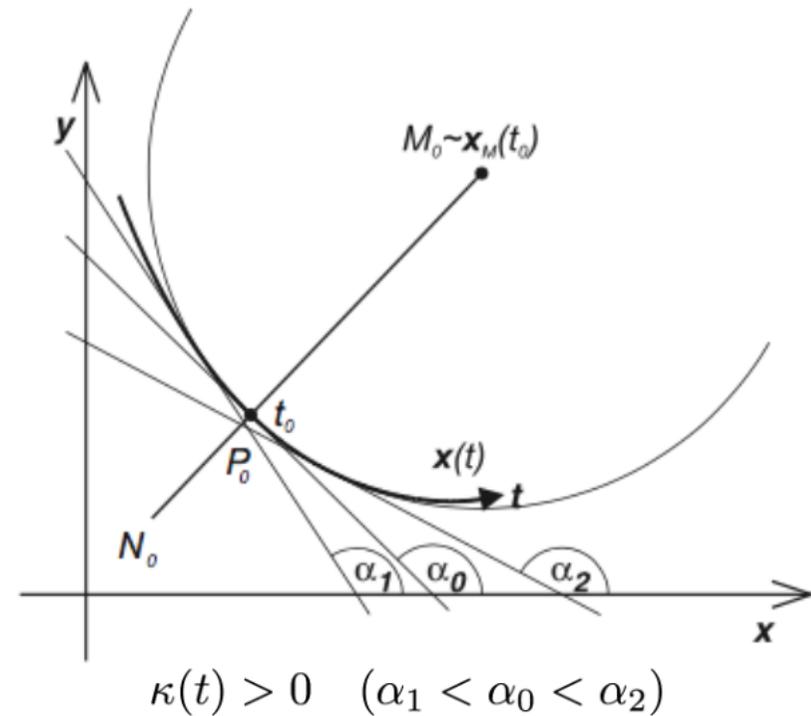
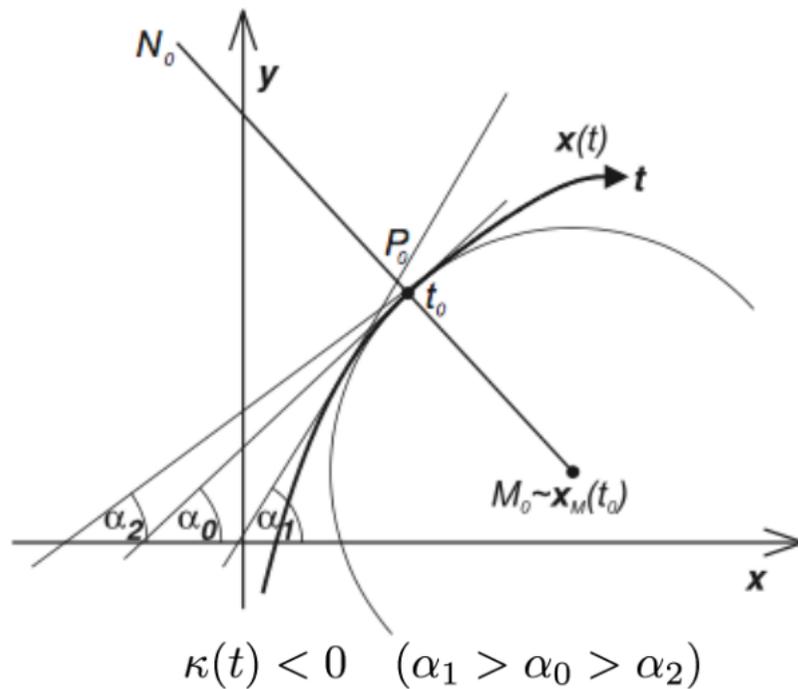
- Falls ang. der Orientierung der Kurve liegt M_0 auf der Normalen N_0 rechts bzw. links der Kurve, je nachdem ob $\kappa(t_0) < 0$ oder $\kappa(t_0) > 0$.
- Von M_0 aus in Richtung L_0 gesehen, erscheint die Kurve für $t \neq t_0(t_0)$ konkav.



Bemerkung (positive und negative Krümmung):

Durch wachsendes t (bzw. wachsende Bogenlänge $s(t)$) ist eine Orientierung der Kurve gegeben.

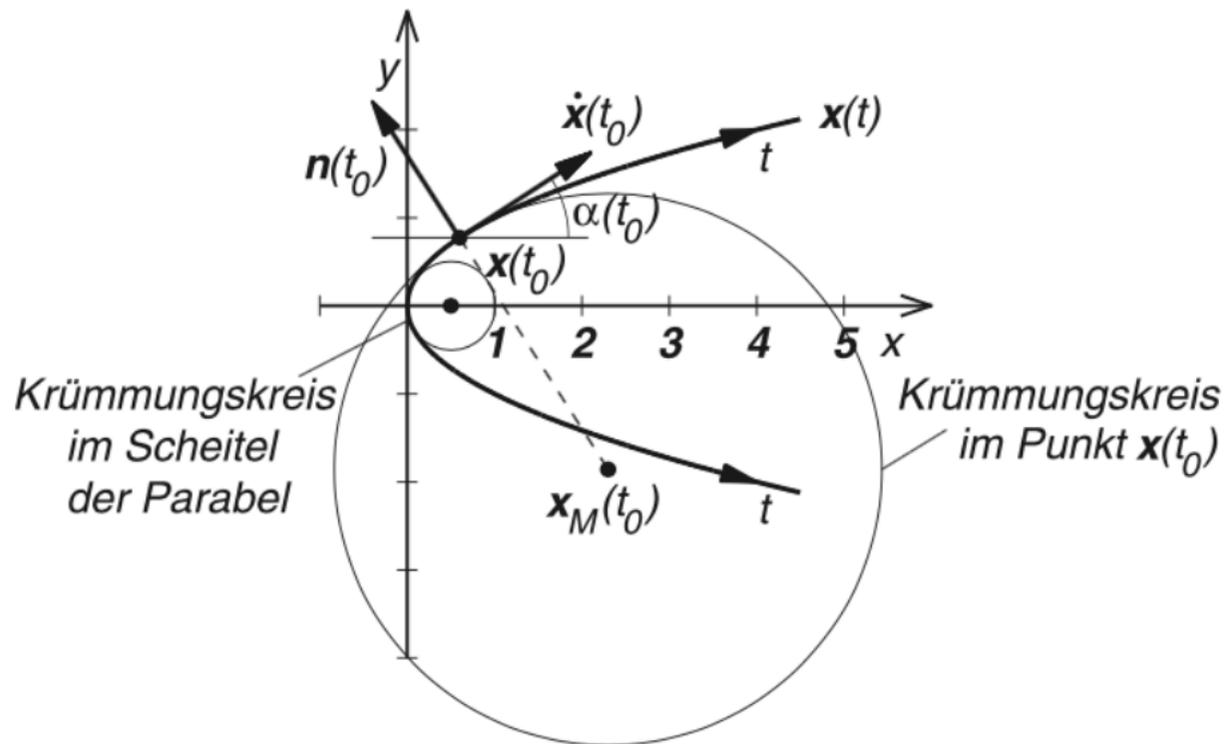
Die Krümmung $\kappa(t)$ ist in einem Punkt $P_0 = (x(t_0), y(t_0))^T$ positiv bzw. negativ, falls der Anstieg $\alpha(t)$ der Tangenten wächst oder fällt.



Bemerkung (Krümmungskreis):

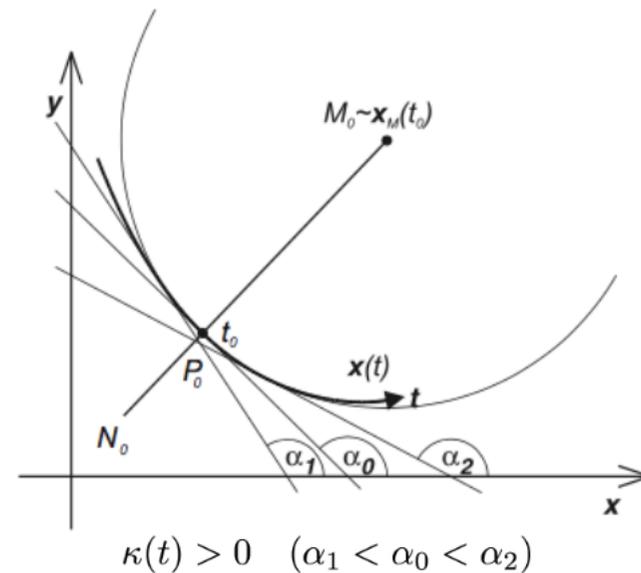
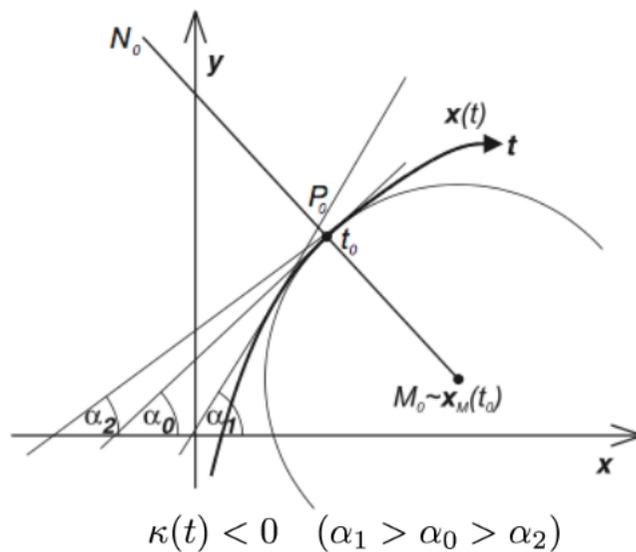
Der **Krümmungskreis** einer Kurve im Punkt P_0 ist der Kreis,

- der durch P_0 geht,
- dessen Radius gleich dem Krümmungsradius ist: $R(t_0) = \frac{1}{|\kappa(t_0)|}$, und
- dessen Mittelpunkt M_0 auf der durch P_0 gehenden Normalen N_0 liegt.



Beobachtungen:

- Entlang der Orientierung der Kurve liegt M_0 auf der Normalen N_0 rechts bzw. links der Kurve, je nachdem ob $\kappa(t_0) < 0$ oder $\kappa(t_0) > 0$.
- Von M_0 aus in Richtung P_0 gesehen, erscheint die Kurve für $t \in U_\delta(t_0)$ konkav.



Bemerkungen (Krümmungsmittelpunkt):

- Der Mittelpunkt M_0 des Krümmungskreises heißt **Krümmungsmittelpunkt**.
- Die Koordinaten $(x_M(t), y_M(t))^T$ von M_0 sind gegeben durch:

$$x_M(t) = x(t) - \dot{y}(t) \frac{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}$$

$$y_M(t) = y(t) + \dot{x}(t) \frac{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}$$

Eine Anwendung der Newton-Iteration

Erinnerung: (Newton-Verfahren)

- Problemstellung: Finde x , so dass $f(x) = 0$ für gegebene Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$
- Iteration: Es wird eine Newton-Folge definiert:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

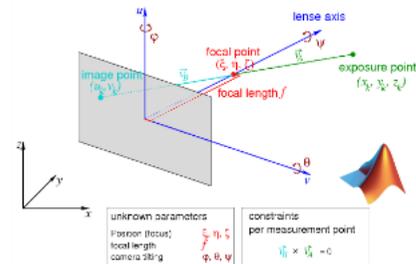
- Konvergenz: Der Satz über das Newton-Verfahren besagt, dass unter geeigneten Voraussetzungen quadratische Konvergenz erreicht wird, d.h.

$$|x_{n+1} - x| \leq C |x_n - x|^2.$$

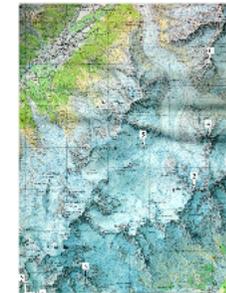
Vorallgemeinerungen

- **Minimierung:** finde $\min_{x \in I} f(x) = m$, wir wissen dass dann $f'(x^*) = 0$ sein muss.
- **Newton-Iteration:** Annahme f zweimal stetig diff'bar, dann erhalte: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.
- **Mehrdimensional:** Hier hat man Messwerte und möchte eine (nicht-lineare) Funktion mit Parametern an diese Messwerte anpassen. Dann erhält man ein Problem $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, und das Minimum kann nur im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate bestimmt werden: $\|f'(x^*)\|_2 = \min$.

Example – Where was the photographer? Geometry of photo situation: model definition



Wo stand der Fotograf?



Daten

- Positionen auf Bild: (x_i, y_i)
- Positionen auf Karte: (x_e, y_e, z_e)

Erinnerung: (Newton-Verfahren)

- Problemstellung: Finde \bar{x} , so dass $f(\bar{x}) = 0$ für gegebene Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.
- Iteration: Es wird eine Newton-Folge definiert:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

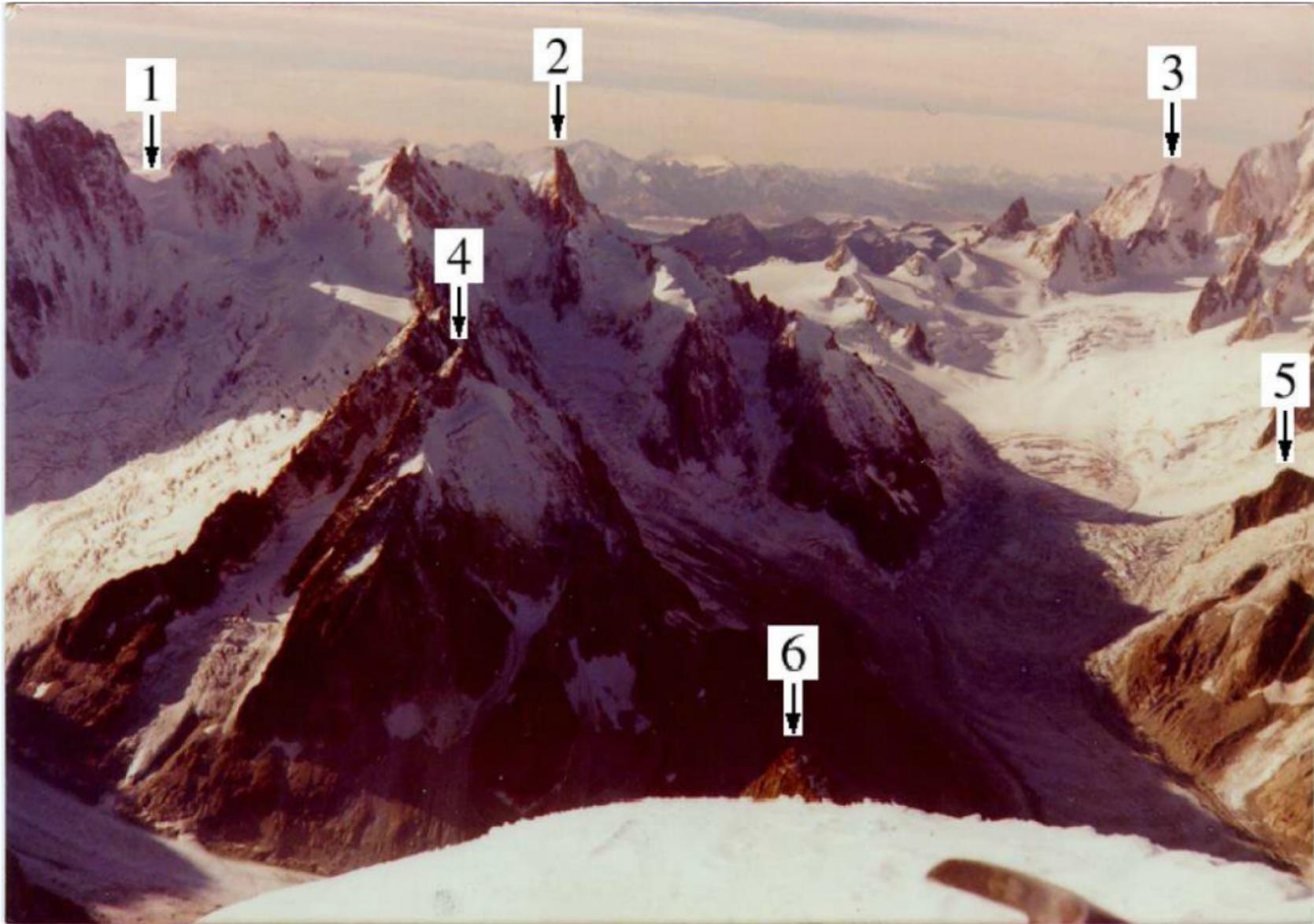
- Konvergenz: Der Satz über das Newton-Verfahren besagt, dass unter geeigneten Voraussetzungen quadratische Konvergenz erreicht wird, d.h.

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq C|x_n - \bar{x}|^2.$$

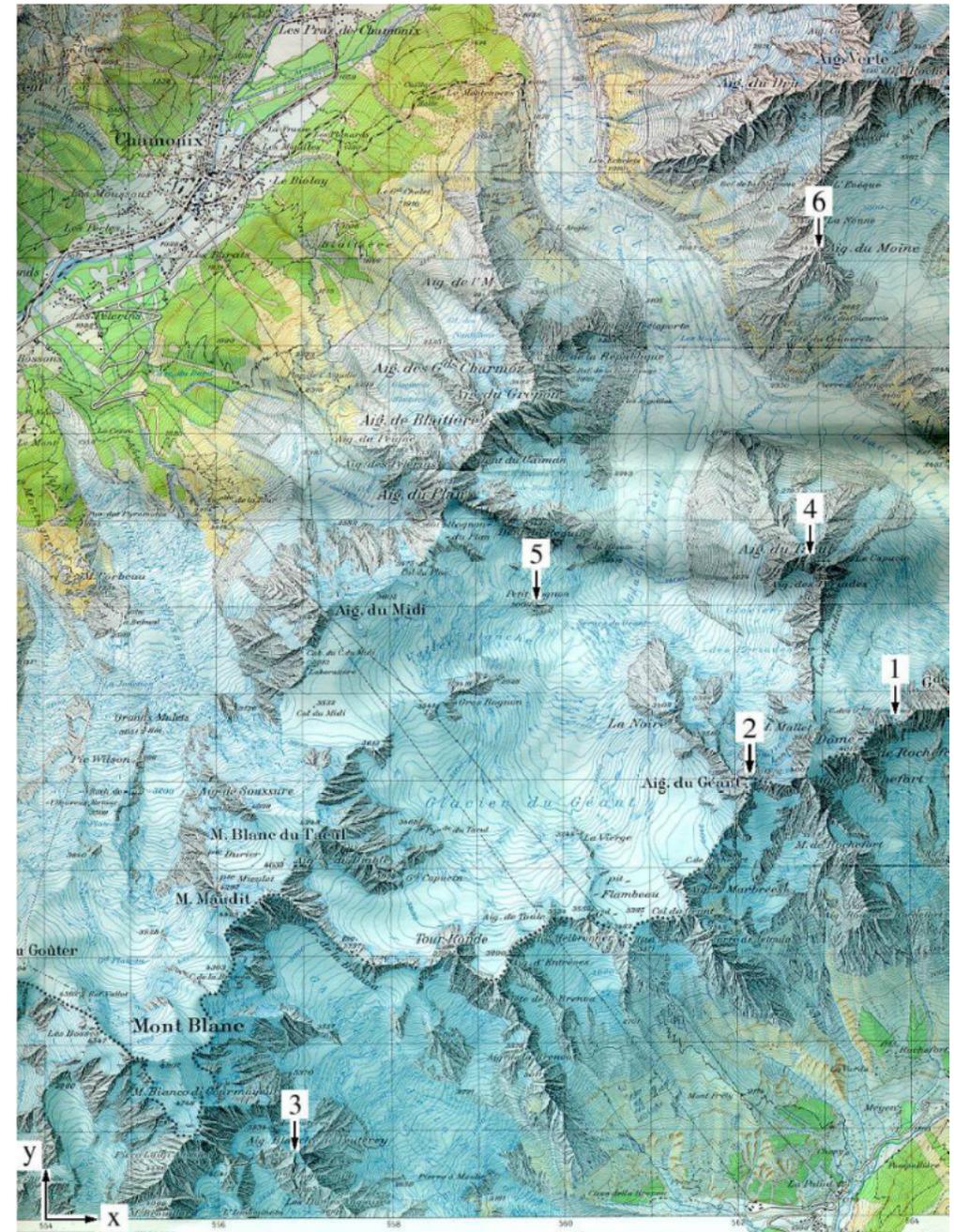
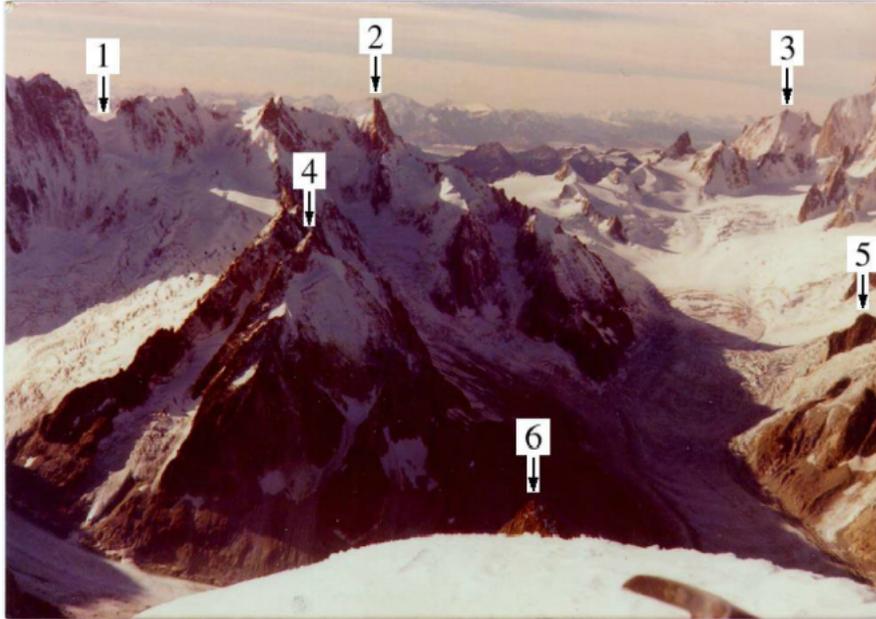
Verallgemeinerungen:

- *Problemstellung*: Finde Minimum: $f(\bar{x}) = \min$, wir wissen dass dann $f'(\bar{x}) = 0$ sein muss.
- *Newton-Iteration*: Annahme f zweimal stetig diff'bar, dann erhalte:
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}.$$
- *Mehrdimensional*: Häufig hat man Messwerte und möchte eine (nicht-lineare) Funktion mit Parametern an diese Messwerte fitten, dann erhält man ein Problem $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, und das Minimum kann nur im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate bestimmt werden: $\|F(\bar{\mathbf{x}})\|_2^2 = \min$.

Wo stand der Fotograf?



Wo stand der Fotograf?

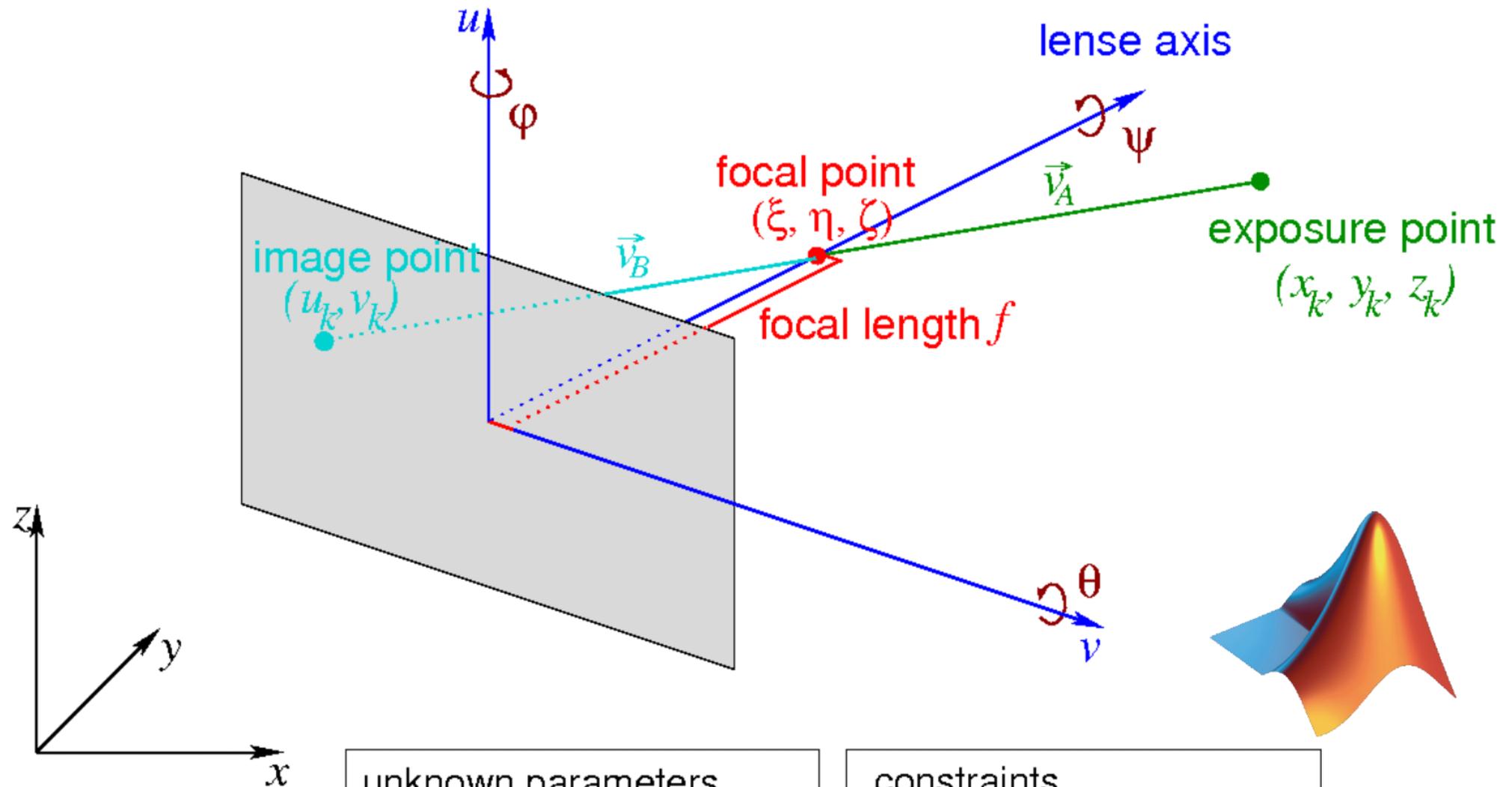


Daten:

- Positionen auf Bild: (u_k, v_k)
- Positionen auf Karte: (x_k, y_k, z_k)

Example – Where was the photographer?

Geometry of photo situation: model definition



unknown parameters	
Position (focus)	ξ, η, ζ
focal length	f
camera tilting	φ, θ, ψ

constraints	
per measurement point	
$\vec{v}_B \times \vec{v}_A = 0$	

Eine Anwendung der Newton-Iteration

Problem: Bestimmen Sie die Tangente an der Stelle $x=1$ an die Kurve $y = \ln(x)$.

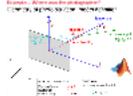
Lösung: Die Tangente an der Stelle $x=1$ an die Kurve $y = \ln(x)$ ist die Gerade $y = x - 1$.

Frage: Warum muss die Ableitung $f'(x)$ nicht Null sein?

Antwort: Die Ableitung $f'(x)$ muss nicht Null sein, da die Tangente an der Stelle $x=1$ an die Kurve $y = \ln(x)$ die Gerade $y = x - 1$ ist, die die Kurve in $(1, 0)$ tangiert.

Frage: Warum muss die Ableitung $f'(x)$ nicht Null sein?

Antwort: Die Ableitung $f'(x)$ muss nicht Null sein, da die Tangente an der Stelle $x=1$ an die Kurve $y = \ln(x)$ die Gerade $y = x - 1$ ist, die die Kurve in $(1, 0)$ tangiert.




Eigenschaften der Krümmung

• •



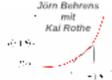
Frage: Was ist die Krümmung einer Kurve?

Antwort: Die Krümmung einer Kurve ist ein Maß für die Abweichung der Kurve von einer Geraden. Sie ist definiert als der Kehrwert des Radius der Krümmung.



Analysis I

Winter 2016/17
 Jörn Behrens
 mit
 Kai Rothe



Kurven (Fortsetzung)
 Anwendung der Newton-Iteration
© 2017 Jörn Behrens, Kai Rothe

Krümmung einer Kurve

Definition: Die Krümmung κ einer Kurve $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ist definiert durch

$$\kappa = \frac{|\dot{x} \ddot{y} - \dot{y} \ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$

Satz: Die Krümmung κ einer Kurve $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ist ein Maß für die Abweichung der Kurve von einer Geraden. Sie ist definiert als der Kehrwert des Radius der Krümmung.

Beispiel: Die Krümmung einer Kreisbahn mit Radius r ist $\kappa = \frac{1}{r}$.

Erinnerung: Kurven

Definition: Eine Kurve $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ von einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ in den n -dimensionalen Raum \mathbb{R}^n .

Tangente, Normale, Bogenlängendifferential

Definition: Die Tangente an der Stelle t an die Kurve γ ist die Gerade T_t durch $\gamma(t)$ mit Richtungsvektor $\dot{\gamma}(t)$.

Definition: Die Normale an der Stelle t an die Kurve γ ist die Ebene N_t durch $\gamma(t)$ mit Normalenvektor $\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)$.

Definition: Das Bogenlängendifferential ds ist ein Maß für die Länge eines kleinen Bogenstücks der Kurve γ .