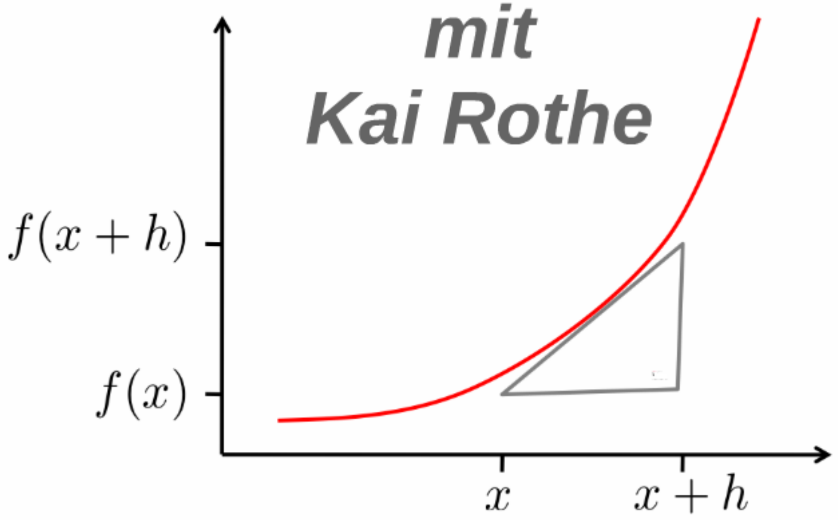
Analysis I

Winter 2016/17

Jörn Behrens
mit
Kai Rothe



Kurven (Fortsetzung)
Anwendung der Newton-Iteration

Buch Kapitel 2.11 und 2.12

Klausuren

Aktuelle Ankündigungen:
http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/klausuren/klausuren_mathe1.html

Mathematik I (Analysis I/Lineare Algebra I)

(Veranstalter/Prüfer "Analysis I": Prof. Dr. Jörn Behrens, Organisation: Dr. Kai Rothe)

Termine:	**Do 23.02.2017 – Ort, Raum und Zeit: siehe TUHH > Prüfungstermine**
Erlaubte Hilfsmittel:	**In der Teilklausur "Analysis I" sind zugelassen:** - eine **eigene Ausarbeitung/Stoffsammlung** auf **gelbem Papier** von höchstens **4 Seiten** (= 2 Blätter DIN A4, Vor- und Rückseite) - eigenes Papier zum Bearbeiten der Klausur sowie Stifte und Lineal **Andere Hilfsmittel als die angegebenen sind nicht erlaubt und auch elektronische Hilfsmittel sind nicht zugelassen ((Taschen-) Rechner u. a.). Das Mitführen von Handys in Klausuren ist grundsätzlich verboten. Zuwiderhandlungen werden als Täuschungsversuch gewertet.**
Beratung:	**Analysis I:** Mo 30.01.2017, 17:00–17:30 Uhr, SBC 5-H, Audimax I Di 31.01.2017, 10:45–11:15 Uhr, SBC 5-H, Audimax I Di 14.02.2017, 15:00–16:30 Uhr, Bundesstr. 55 (Geomatikum), Hörsaal 1 –> **PDF**

Hinweis:
Wer die Übungsaufgaben lösen kann, kann auch die Klausuraufgaben lösen.

Erinnerung: Kurven

Definition

Definition: (Kurve im $\mathbb{R}^2$)
Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ und $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall. Jede Abbildung

$$\mathbf{x} : [a, b] \to G, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $x_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $x_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Kurvenstück in G mit

- Anfangspunkt $\mathbf{x}(a) = (x_1(a), x_2(a))^\top$,
- Endpunkt $\mathbf{x}(b) = (x_1(b), x_2(b))^\top$,
- Spur $\{\mathbf{x}(t) | a \leq t \leq b\}$.

Zur Darstellung der Kurvenpunkte aus dem $\mathbb{R}^2$ werden Spaltenvektoren verwendet:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2)^\top.$$

Ein Kurvenstück heißt regulär, wenn für alle $t \in [a, b]$ gilt:

$$(\dot{x}_1(t))^2 + (\dot{x}_2(t))^2 > 0.$$

Eine Parameterdarstellung des Kurvenstücks mit dem Parameter t ist gegeben durch

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Durch wachsende Werte des Parameters t ist für das Kurvenstück eine Orientierung gegeben.
Eine Aneinanderreihung von Kurvenstücken K_i $(i = 1 : n)$, wobei der Anfangspunkt von K_i dem Endpunkt von K_{i-1} $(i = 2 : n)$ entspricht, heißt Kurve.
Ist nur ein Kurvenstück vorhanden, wird es oft auch als Kurve bezeichnet.

Tangente, Normale, Bogendifferential

Definition:

- $\dot{\mathbf{x}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))^\top$ heißt Tangentenvektor,
- $\mathbf{n}(t) = (-\dot{y}(t), \dot{x}(t))^\top$ heißt Normalenvektor,

der Kurve $\mathbf{x}(t)$ im Punkt $(x(t), y(t))^\top$.

Bogenlänge: (Bogendifferential)

$$ds := \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt.$$

heißt Differential der Bogenlänge (oder Bogenelement), wobei dt das Differential der unabhängigen Variablen t ist.

Definition

Definition: (Kurve im $\mathbb{R}^2$)
Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ und $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall. Jede Abbildung

$$\mathbf{x} : [a, b] \to G, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $x_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $x_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Kurvenstück in G mit

- Anfangspunkt $\mathbf{x}(a) = (x_1(a), x_2(a))^\top$,
- Endpunkt $\mathbf{x}(b) = (x_1(b), x_2(b))^\top$,
- Spur $\{\mathbf{x}(t) | a \leq t \leq b\}$.

Zur Darstellung der Kurvenpunkte aus dem $\mathbb{R}^2$ werden Spaltenvektoren verwendet:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2)^\top.$$

Ein Kurvenstück heißt regulär, wenn für alle $t \in [a, b]$ gilt:

$$\left(x_1'(t)\right)^2 + \left(x_2'(t)\right)^2 > 0.$$

Eine Parameterdarstellung des Kurvenstücks mit dem Parameter t ist gegeben durch

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Durch wachsende Werte des Parameters t ist für das Kurvenstück eine Orientierung gegeben.
Eine Aneinanderreihung von Kurvenstücken K_i $(i = 1 : r)$, wobei der Anfangspunkt von K_i dem Endpunkt von K_{i-1} $(i = 2 : r)$ entspricht, heißt Kurve.
Ist nur ein Kurvenstück vorhanden, wird es oft auch als Kurve bezeichnet.

Tangente, Normale, Bogendifferential

Definition:

- $\dot{\mathbf{x}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))^\top$ heißt Tangentenvektor,
- $\mathbf{n}(t) = (-\dot{y}(t), \dot{x}(t))^\top$ heißt Normalenvektor,

der Kurve $\mathbf{x}(t)$ im Punkt $(x(t), y(t))^\top$.

Bogenlänge: (Bogendifferential)

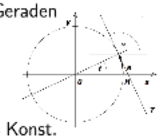
$$ds := \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt.$$

heißt Differential der Bogenlänge (oder Bogenelement), wobei dt das Differential der unabhängigen Variablen t ist.

Krümmung einer Kurve

Anschaulich:

Krümmung = Abweichung von Geraden



Also: Gerade habe die Krümmung 0 (Null).

Andererseits:

Krümmung einer Kreislinie $= K =$ Konst.

Mathematisch (Motivation):

$$\text{Krümmung} = \kappa = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}$$

Definition (Mathematisch Formal):
Die Krümmung einer regulären Kurve $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))^\top$, $t \in [a, b]$ mit zweimal stetig diff'baren Funktionen $x, y : [a, b] \to \mathbb{R}$ beträgt im Punkt $P(t) = (x(t), y(t))^\top$

$$\kappa(t) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{\sqrt{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^3}}.$$

Falls die Kurve als Graph der zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $\mathbf{x}(t) = (t, f(t))^\top$ gegeben ist, ergibt sich

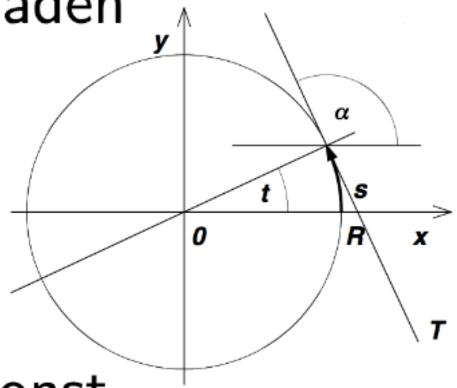
$$\kappa(t) = \frac{f''(t)}{\sqrt{(1 + (f'(t))^2)^3}}.$$

$R = \frac{1}{|\kappa|}$ heißt Krümmungsradius.

1

Anschaulich:

$$\text{Krümmung} = \text{Abweichung von Geraden}$$



Also: Gerade habe die Krümmung 0 (Null).

Andererseits:

$$\text{Krümmung einer Kreislinie} = K = \text{Konst.}$$

Mathematisch (Motivation):

$$\text{Krümmung} = \kappa = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}$$

Definition (Mathematisch Formal):
Die Krümmung einer regulären Kurve $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))^\top$, $t \in [a, b]$ mit zweimal stetig diff'baren Funktionen $x, y : [a, b] \to \mathbb{R}$ beträgt im Punkt $P(t) = (x(t), y(t))^\top$

$$\kappa(t) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{\sqrt{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^3}}.$$

Falls die Kurve als Graph der zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $\mathbf{x}(t) = (t, f(t))^\top$ gegeben ist, ergibt sich

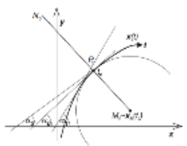
$$\kappa(t) = \frac{f''(t)}{\sqrt{(1 + (f'(t))^2)^3}}.$$

$R = \frac{1}{|\kappa|}$ heißt Krümmungsradius.

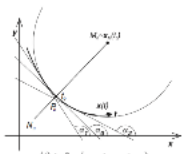
1

Eigenschaften der Krümmung

Bemerkung (positive und negative Krümmung):
Durch wachsendes t (bzw. wachsende Bogenlänge $s(t)$) ist eine Orientierung der Kurve gegeben.
Die Krümmung $\kappa(t)$ ist in einem Punkt $P_0 = (x(t_0), y(t_0))^\top$ positiv bzw. negativ, falls der Anstieg $\alpha(t)$ der Tangenten wächst oder fällt.



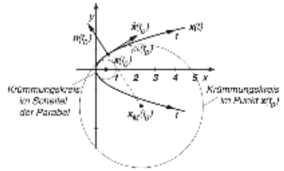
$\kappa(t) < 0 \quad (\alpha_1 > \alpha_0 > \alpha_2)$



$\kappa(t) > 0 \quad (\alpha_1 < \alpha_0 < \alpha_2)$

Bemerkung (Krümmungskreis):
Der Krümmungskreis einer Kurve im Punkt P_0 ist der Kreis,

- der durch P_0 geht,
- dessen Radius gleich dem Krümmungsradius ist: $R(t_0) = \frac{1}{|\kappa(t_0)|}$, und
- dessen Mittelpunkt M_0 auf der durch P_0 gehenden Normalen N_0 liegt.



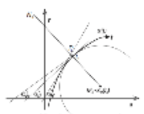
Bemerkungen (Krümmungsmittelpunkt):

- Der Mittelpunkt M_0 des Krümmungskreises heißt Krümmungsmittelpunkt.
- Die Koordinaten $(x_M(t), y_M(t))^\top$ von M_0 sind gegeben durch:

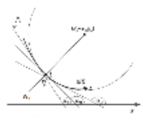
$$x_M(t) = x(t) - \dot{y}(t)\frac{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}$$
$$y_M(t) = y(t) + \dot{x}(t)\frac{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}$$

Beobachtungen:

- Entlang der Orientierung der Kurve liegt M_0 auf der Normalen N_0 rechts bzw. links der Kurve, je nachdem ob $\kappa(t_0) < 0$ oder $\kappa(t_0) > 0$.
- Von M_0 aus in Richtung P_0 gesehen, erscheint die Kurve für $t \in U_\delta(t_0)$ konkav.

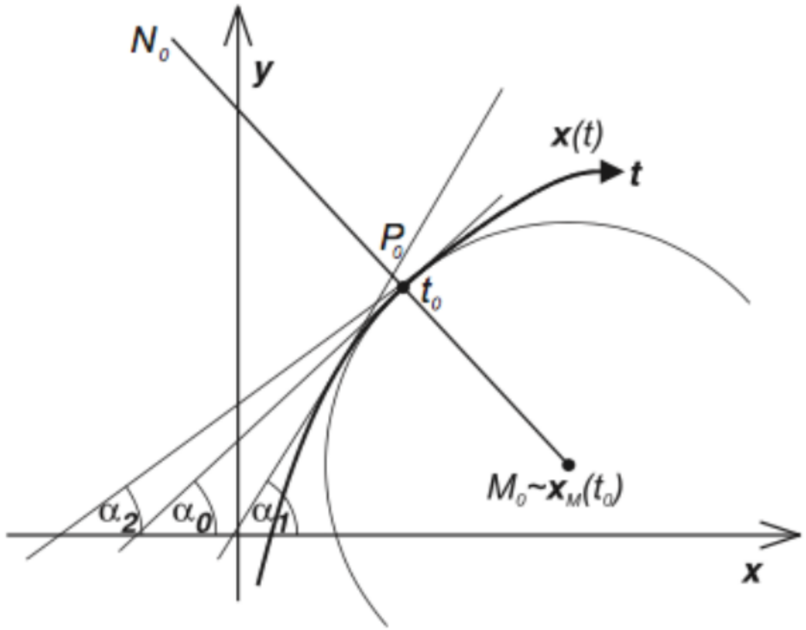


$\kappa(t) < 0 \quad (\alpha_1 > \alpha_0 > \alpha_2)$

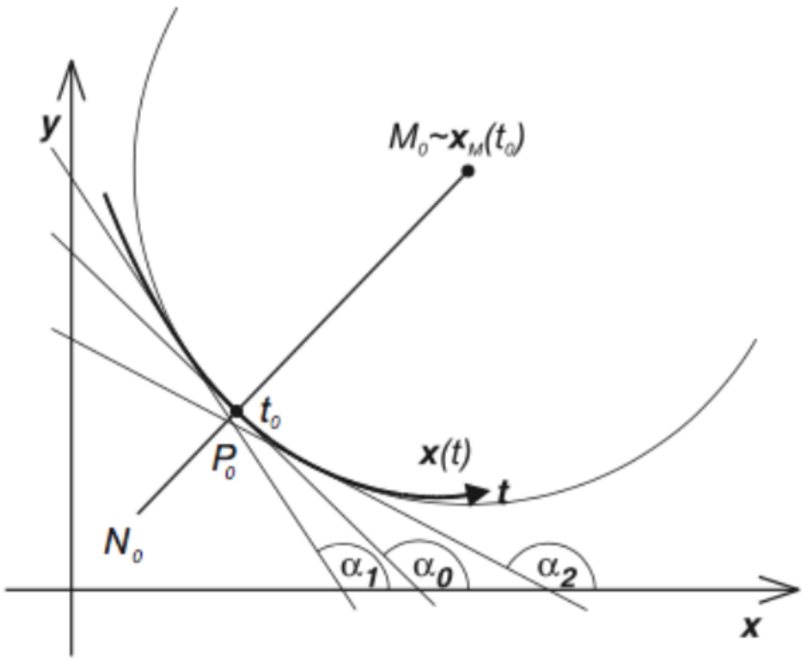


$\kappa(t) > 0 \quad (\alpha_1 < \alpha_0 < \alpha_2)$

Bemerkung (positive und negative Krümmung):
Durch wachsendes t (bzw. wachsende Bogenlänge $s(t)$) ist eine Orientierung der Kurve gegeben.
Die Krümmung $\kappa(t)$ ist in einem Punkt $P_0 = (x(t_0), y(t_0))^\top$ positiv bzw. negativ, falls der Anstieg $\alpha(t)$ der Tangenten wächst oder fällt.



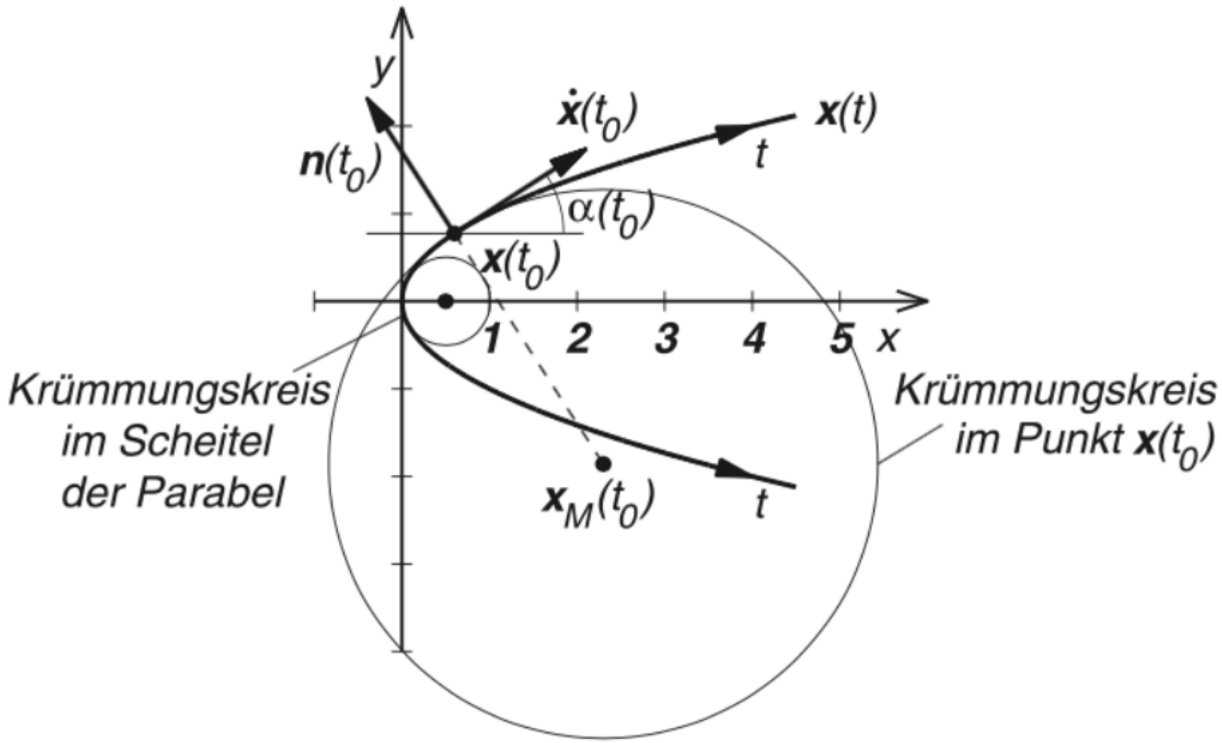
$\kappa(t) < 0 \quad (\alpha_1 > \alpha_0 > \alpha_2)$



$\kappa(t) > 0 \quad (\alpha_1 < \alpha_0 < \alpha_2)$

Bemerkung (Krümmungskreis):
Der Krümmungskreis einer Kurve im Punkt P_0 ist der Kreis,

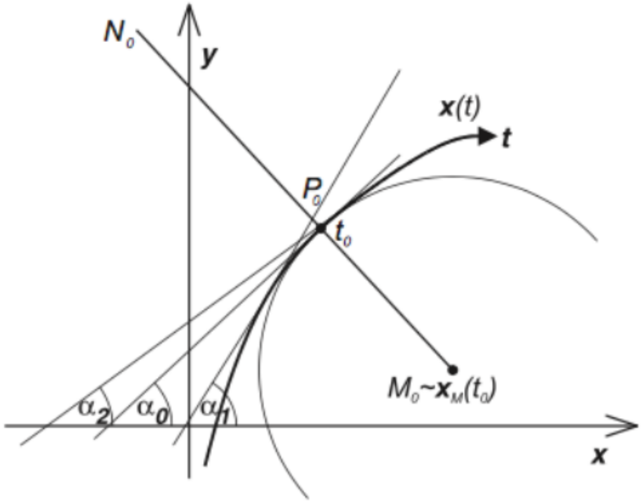
- der durch P_0 geht,
- dessen Radius gleich dem Krümmungsradius ist: $R(t_0) = \frac{1}{|\kappa(t_0)|}$, und
- dessen Mittelpunkt M_0 auf der durch P_0 gehenden Normalen N_0 liegt.



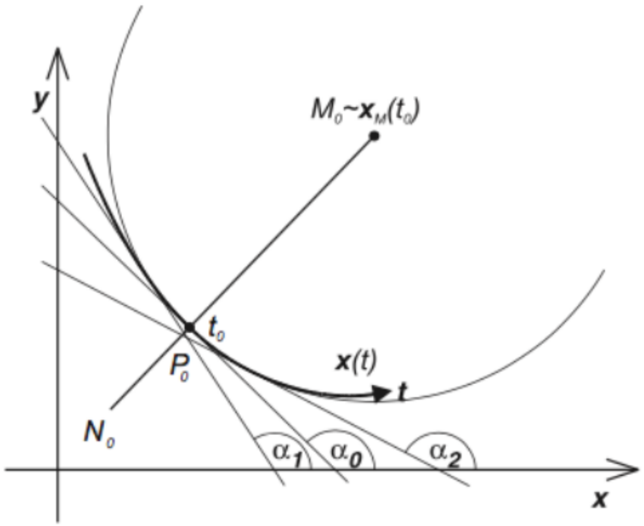
Beobachtungen:

- Entlang der Orientierung der Kurve liegt M_0 auf der Normalen N_0 rechts bzw. links der Kurve, je nachdem ob $\kappa(t_0) < 0$ oder $\kappa(t_0) > 0$.

- Von M_0 aus in Richtung P_0 gesehen, erscheint die Kurve für $t \in U_\delta(t_0)$ konkav.



$\kappa(t) < 0 \quad (\alpha_1 > \alpha_0 > \alpha_2)$



$\kappa(t) > 0 \quad (\alpha_1 < \alpha_0 < \alpha_2)$

Bemerkungen (Krümmungsmittelpunkt):

- Der Mittelpunkt M_0 des Krümmungskreises heißt Krümmungsmittelpunkt.
- Die Koordinaten $(x_M(t), y_M(t))^\top$ von M_0 sind gegeben durch:

$$x_M(t) = x(t) - \dot{y}(t) \frac{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}$$
$$y_M(t) = y(t) + \dot{x}(t) \frac{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}$$

Eine Anwendung der Newton-Iteration

Erinnerung: (Newton-Verfahren)

- Problemstellung: Finde x, so dass $f(x) = 0$ für gegebene Funktion $f : I \to \mathbb{R}$.
- Iteration: Es wird eine Newton-Folge definiert:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

- Konvergenz: Der Satz über das Newton-Verfahren besagt, dass unter geeigneten Voraussetzungen quadratische Konvergenz erreicht wird, d.h.

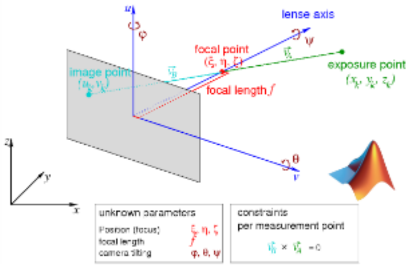
$$|x_{n+1} - x| \leq C|x_n - x|^2.$$

Verallgemeinerungen

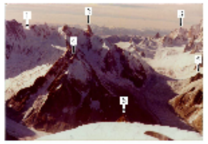
- *Problemstellung*: Finde Minimum: $f(\bar{x}) \to \min$, wir wissen dass dann $f'(\bar{x}) = 0$ sein muss.
- *Newton-Iteration*: Annahme f zweimal stetig diff'bar, dann erhalte: $x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$.
- *Mehrdimensional*: Häufig hat man Messwerte und möchte eine (nicht lineare) Funktion mit Parametern an diese Messwerte fitten, dann erhält man ein Problem $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, und das Minimum kann nur im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate bestimmt werden: $\|F(\bar{x})\|_2^2 \to \min$.

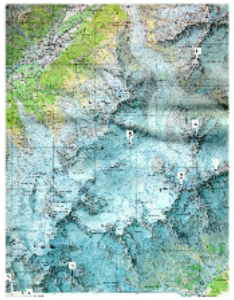
Example – Where was the photographer?

Geometry of photo situation: model definition



Wo stand der Fotograf?





Daten

- Positionen auf Bild: (u_i, v_i)
- Positionen auf Karte: (x_i, y_i, z_i)

Erinnerung: (Newton-Verfahren)

- Problemstellung: Finde $\bar{x}$, so dass $f(\bar{x}) = 0$ für gegebene Funktion $f : I \to \mathbb{R}$.
- Iteration: Es wird eine Newton-Folge definiert:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

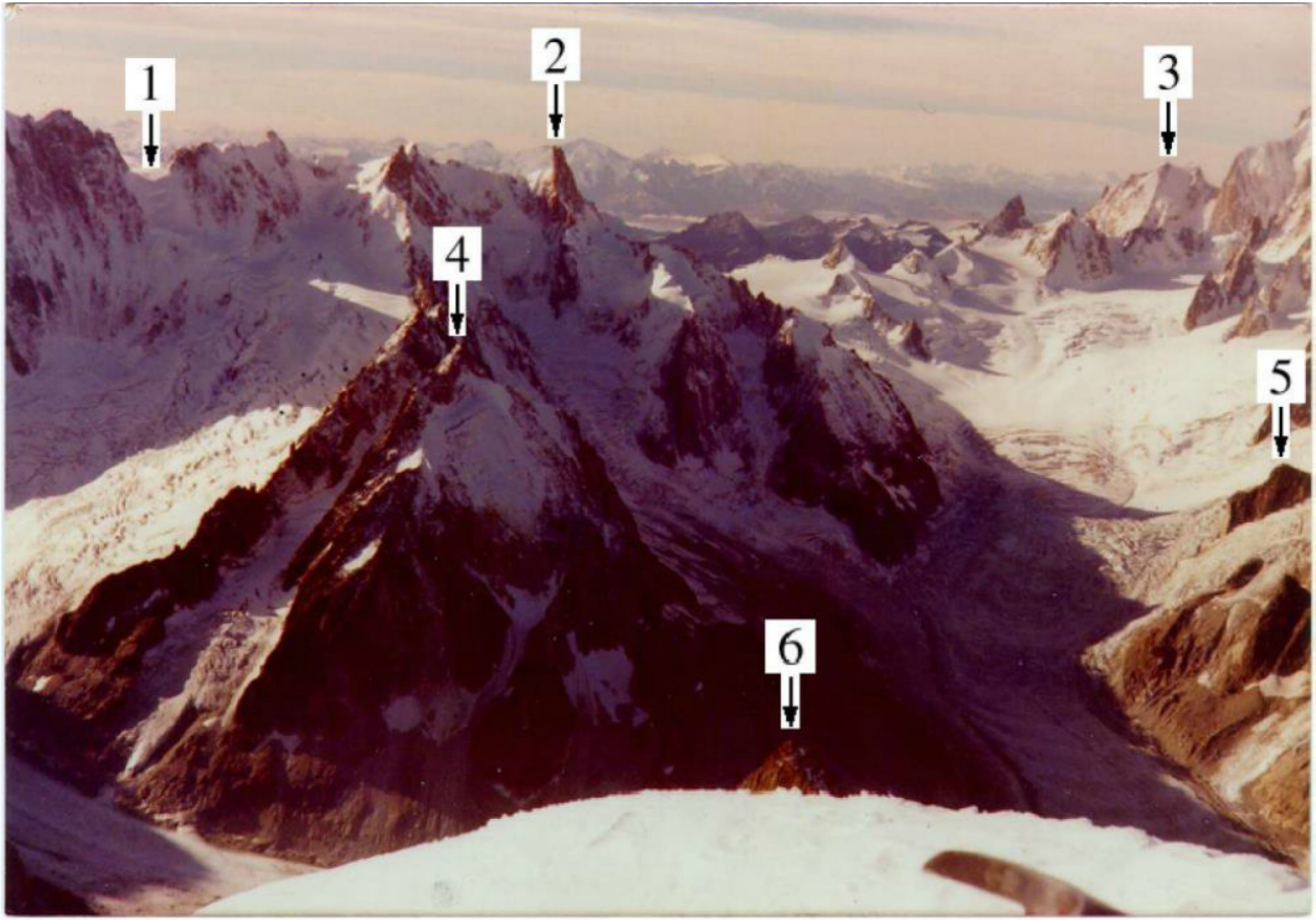
- Konvergenz: Der Satz über das Newton-Verfahren besagt, dass unter geeigneten Voraussetzungen quadratische Konvergenz erreicht wird, d.h.

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \le C|x_n - \bar{x}|^2.$$

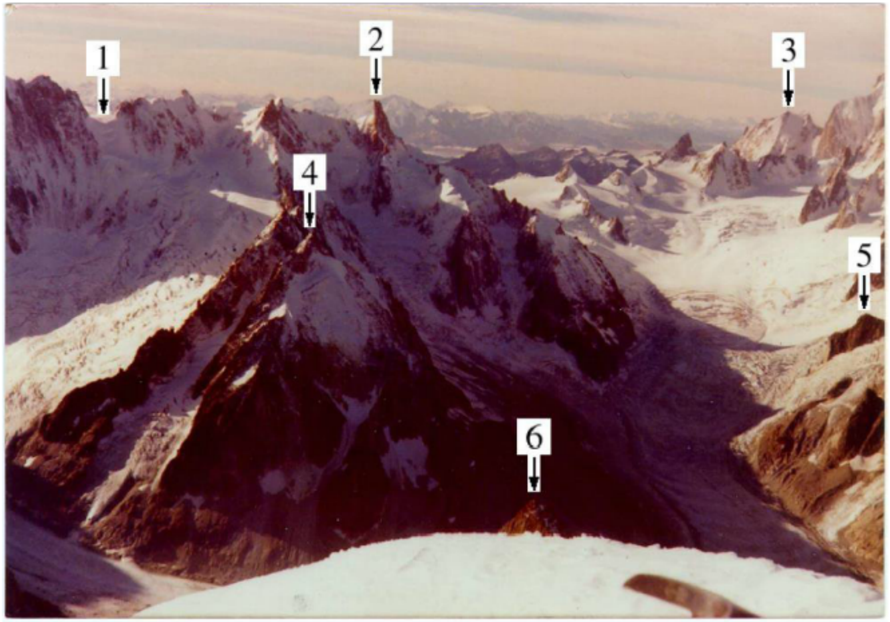
Verallgemeinerungen:

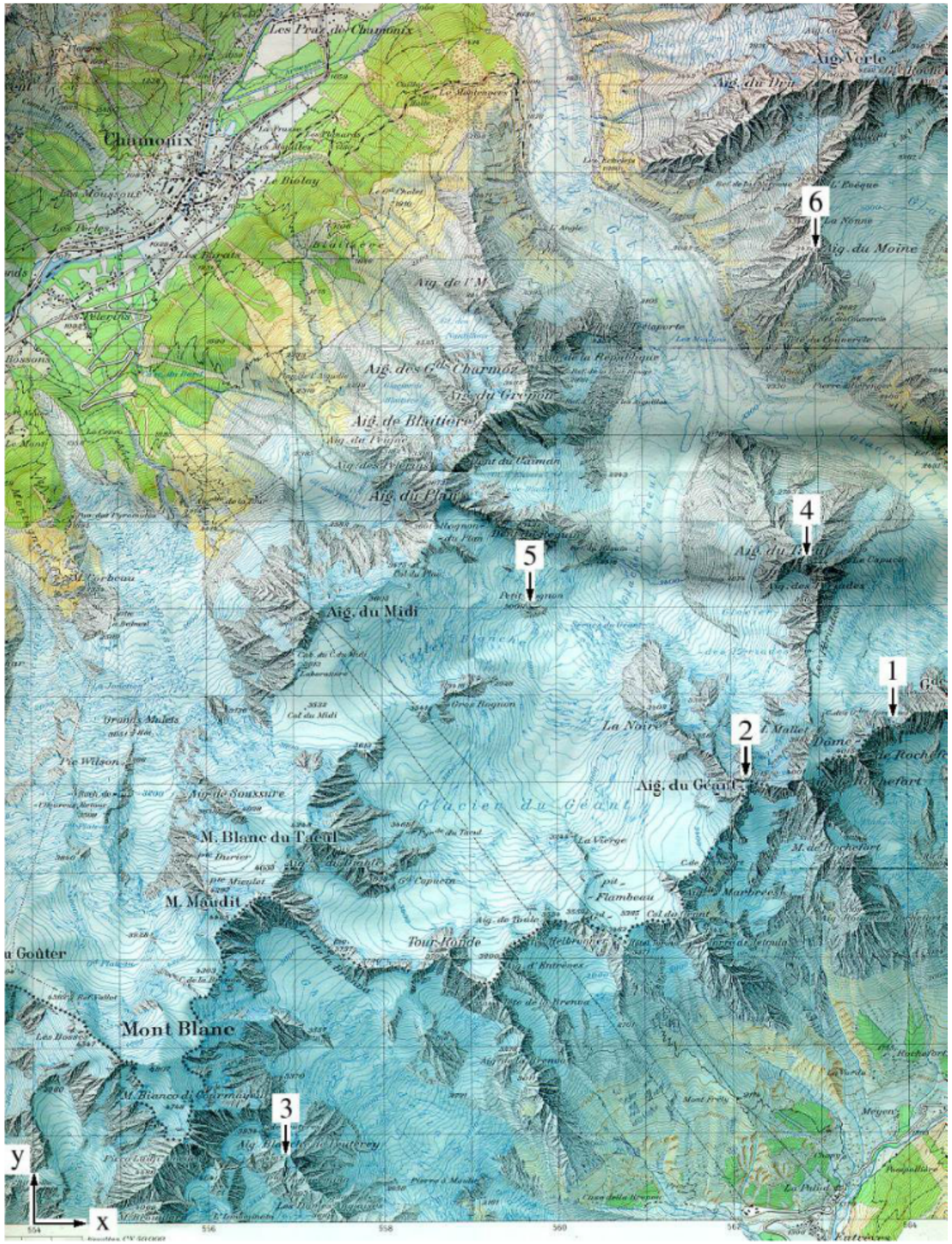
- *Problemstellung*: Finde Minimum: $f(\bar{x}) = \min$, wir wissen dass dann $f'(\bar{x}) = 0$ sein muss.
- *Newton-Iteration*: Annahme f zweimal stetig diff'bar, dann erhalte: $x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$.
- *Mehrdimensional*: Häufig hat man Messwerte und möchte eine (nicht-lineare) Funktion mit Parametern an diese Messwerte fitten, dann erhält man ein Problem $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, und das Minimum kann nur im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate bestimmt werden: $\|F(\bar{\mathbf{x}})\|_2^2 = \min$.

Wo stand der Fotograf?



Wo stand der Fotograf?



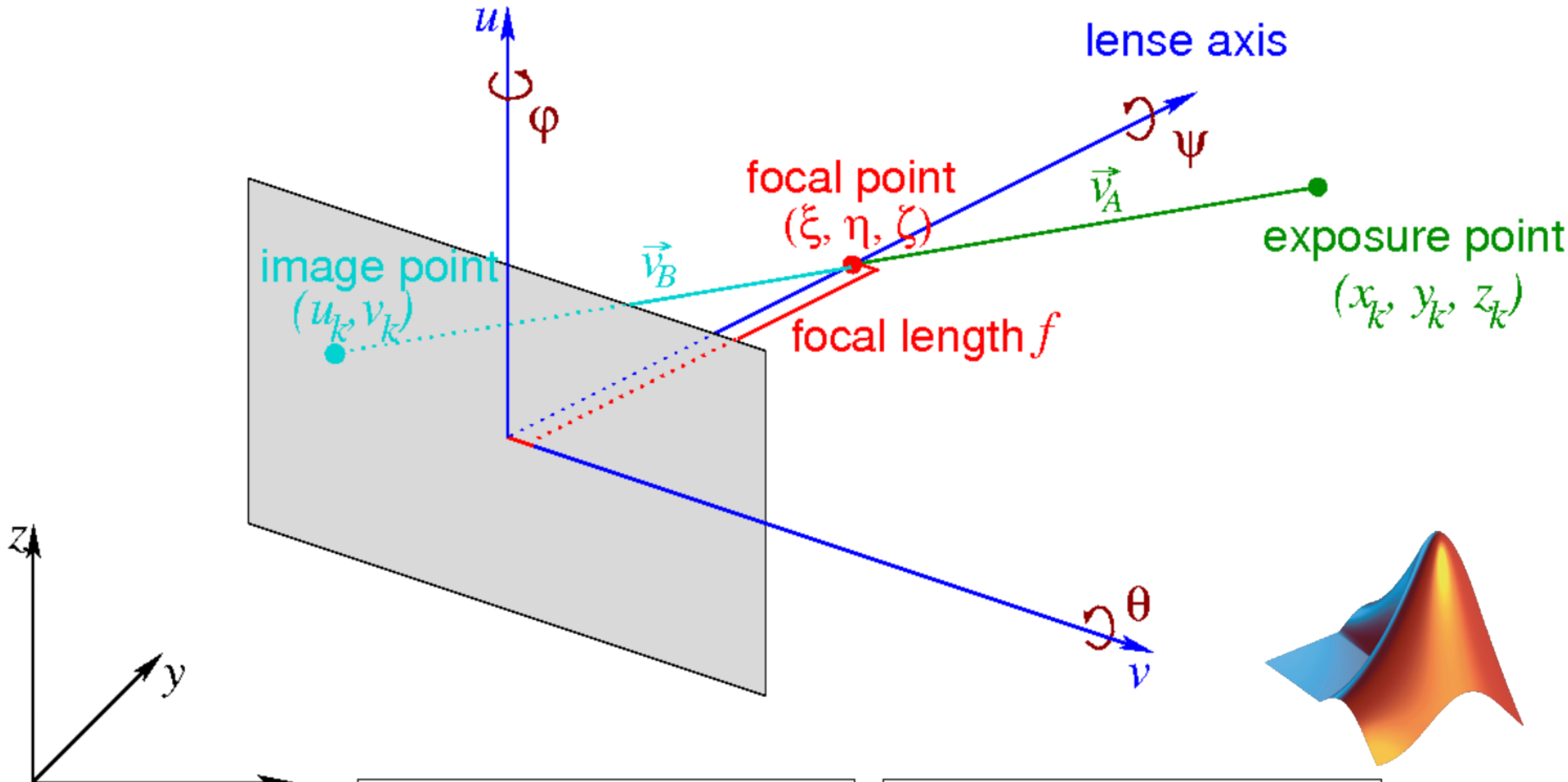


Daten:

- Positionen auf Bild: (u_k, v_k)
- Positionen auf Karte: (x_k, y_k, z_k)

Example – Where was the photographer?

Geometry of photo situation: model definition



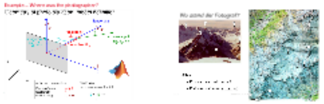
unknown parameters

Position (focus)	ξ, η, ζ
focal length	f
camera tilting	φ, θ, ψ

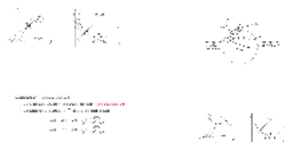
constraints per measurement point

$$\vec{v}_B \times \vec{v}_A = 0$$

Eine Anwendung der Newton-Iteration



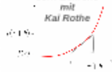
Eigenschaften der Krümmung



Analysis I

Winter 2016/17

Jörn Behrens
mit
Kai Rothe



Kurven (Fortsetzung)
Anwendung der Newton-Iteration

Krümmung einer Kurve

Erinnerung: Kurven

Definition

Tangente, Normale, Bogendifferential