

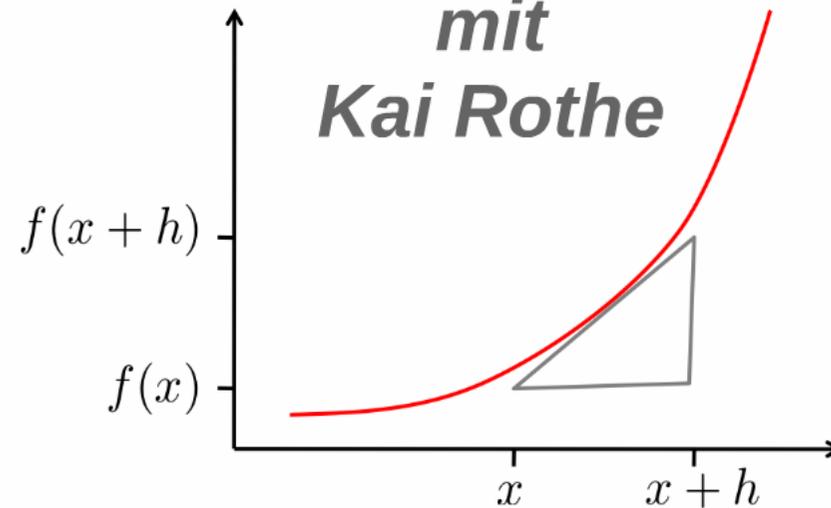
Analysis I

Winter 2016/17

Jörn Behrens

mit

Kai Rothe



Newton-Verfahren, Kurven 

Buch Kapitel 2.11 und 2.12

Lehre braucht Feedback!

<https://checking.tuhh.de/ce/c2b785bd/de.html>



- Bitte bewerten Sie jetzt meine Lehrveranstaltung online
- Teilnahme ist auch später möglich
- Die Eingabe und Auswertung ihrer Angaben ist vollkommen anonym
- Bei Fragen wenden Sie sich an: evaluation@tuhh.de

Vielen Dank für Ihre Teilnahme!

Erinnerung: Fixpunktiteration

Idee: Durch die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die definiert ist durch

$$x_0 \in I, \quad x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

ist im Falle der Konvergenz bei stetiger Funktion f ein Fixpunkt gegeben.
Die Folge heißt dann eine **Fixpunkt-Folge**.

Satz: (Bannachscher Fixpunktsatz in \mathbb{R})

Sei $f : I \rightarrow I$ eine Funktion die $I \subset \mathbb{R}$ in sich abbildet. Weiter gelte für alle $x, y \in I$

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

mit einer von x, y unabhängigen Konstanten $0 < K < 1$. Dann hat f genau einen Fixpunkt $\bar{x} \in I$ und die durch $x_{n+1} = f(x_n)$ definierte Iterationsfolge (x_n) konvergiert für jeden beliebigen Anfangspunkt $x_0 \in I$ gegen diesen Fixpunkt.



Idee: Durch die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die definiert ist durch

$$x_0 \in I, \quad x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

ist im Falle der Konvergenz bei stetiger Funktion f ein Fixpunkt gegeben. Die Folge heißt dann eine **Fixpunkt-Folge**.

Satz: (Bannachscher Fixpunktsatz in \mathbb{R})

Sei $f : I \rightarrow I$ eine Funktion die $I \subset \mathbb{R}$ in sich abbildet. Weiter gelte für alle $x, y \in I$

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

mit einer von x, y unabhängigen Konstanten $0 < K < 1$. Dann hat f genau einen Fixpunkt $\bar{x} \in I$ und die durch $x_{n+1} = f(x_n)$ definierte Iterationsfolge (x_n) konvergiert für jeden beliebigen Anfangspunkt $x_0 \in I$ gegen diesen Fixpunkt.



Idee Newton-Verfahren

Beobachtung: Die Fixpunkt-Iteration benötigt zwei wichtige Voraussetzungen:

1. $f: I \rightarrow I$,
2. $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ mit $|K| < 1$, $x, y \in I$.

Frage: Was können wir tun, wenn diese Voraussetzungen nicht erfüllt sind?

Idee: Nach der Taylor-Formel ist die Tangente für x in der Nähe einer Nullstelle \bar{x}

$$g(x) = f(x) - f'(x)(x - \bar{x})$$

eine gute (erste) Näherung an die Funktion. Ein Algorithmus könnte also aus folgenden Schritten bestehen:

1. Wähle x_0 in der Nähe von \bar{x} .
2. Berechne Schnittpunkt der Tangente $g(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0)$ mit x -Achse.
3. Wähle diesen Wert als neues x_1 und fahre fort.

Iteration: Setze also

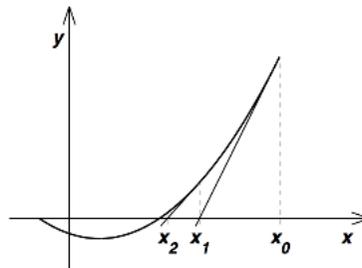
$$g(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0 \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Dabei muss $f'(x) \neq 0$ gelten.

Allgemein: Definiere Iteration (Newton-Folge)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Frage: Unter welchen Bedingungen konvergiert die Newton-Folge?



N

Satz: (I)

Sei f :
zweimal
existiere

Beobachtung: Die Fixpunkt-Iteration benötigt zwei wichtige Voraussetzungen:

1. $f : I \rightarrow I,$

2. $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ mit $|K| < 1, x, y \in I.$

Frage: Was können wir tun, wenn diese Voraussetzungen nicht erfüllt sind?

Idee: Nach der Taylor-Formel ist die Tangente für x in der Nähe einer Nullstelle \bar{x}

$$g(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x})$$

eine gute (erste) Näherung an die Funktion. Ein Algorithmus könnte also aus folgenden Schritten bestehen:

1. Wähle x_0 in der Nähe von \bar{x} ,
2. Berechne Schnittpunkt der Tangente $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ mit x -Achse.
3. Wähle diesen Wert als neues x_1 und fahre fort.

Iteration: Setze also

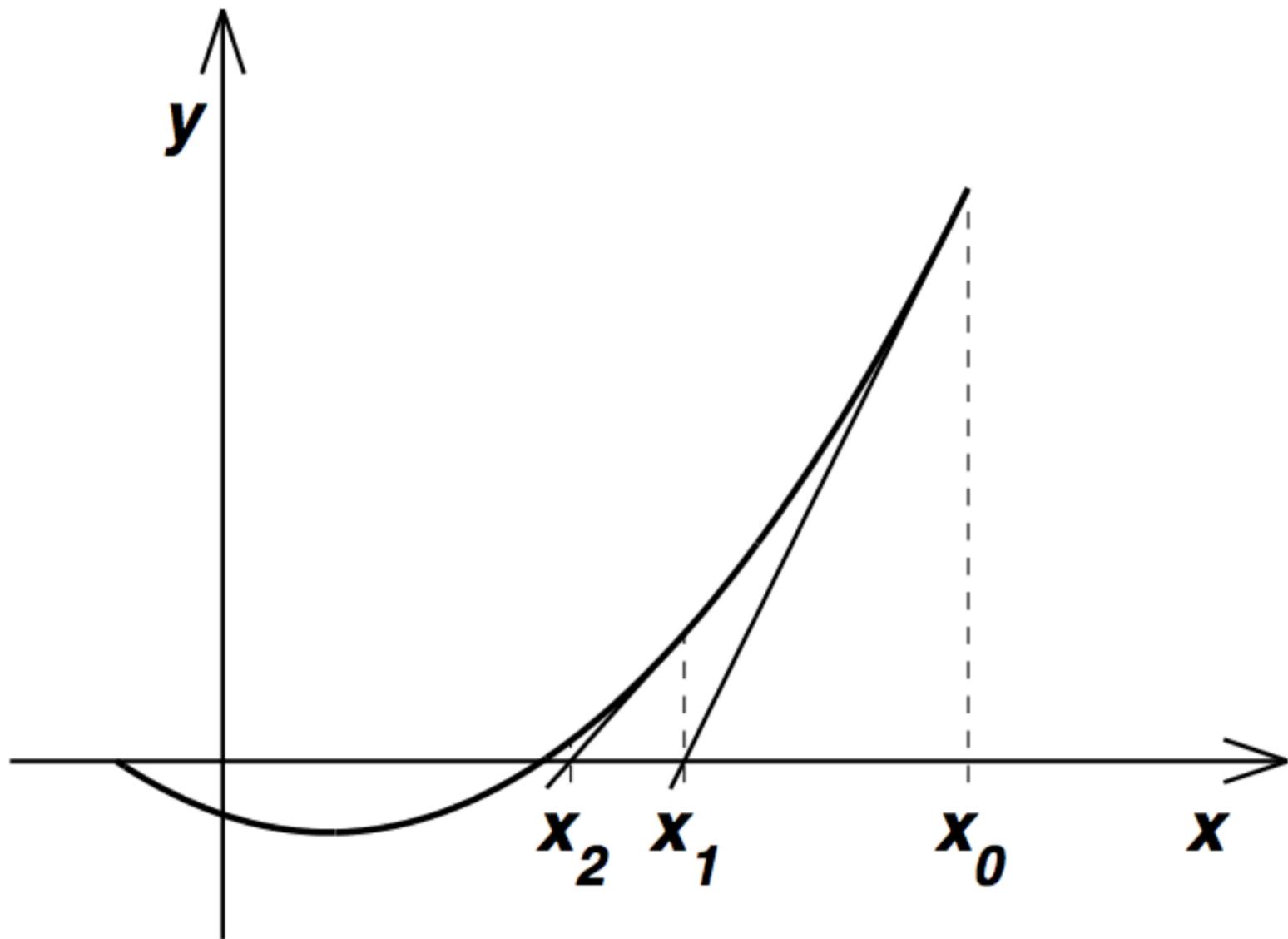
$$g(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Dabei muss $f'(x) \neq 0$ gelten.

Allgemein: Definiere Iteration (**Newton-Folge**)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Frage: Unter welchen Bedingungen konvergiert die Newton-Folge?



Newton-Verfahren

Satz: (Newton-Verfahren)

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf einem Intervall $I \supset [x_0 - r, x_0 + r]$ ($r > 0$) definierte, zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Weiterhin existiere $K \in \mathbb{R}$, $0 < K < 1$ mit

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \right| \leq K \quad \text{für alle } x \in I$$

und

$$\left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| \leq (1 - K)r.$$

Dann hat f genau eine Nullstelle \bar{x} in I und die Newton-Folge konvergiert quadratisch gegen \bar{x} , d.h. es gilt

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq C(x_n - \bar{x})^2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Außerdem gilt die Fehlerabschätzung

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{|f(x_n)|}{M} \quad \text{mit } 0 < M = \min_{x \in I} |f'(x)|.$$



Beweisidee:

- Definiere Hilfsfunktion $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
- Definiere Iterationsfolge $x_{n+1} = g(x_n)$
- Wende auf die Iterationsfolge den Banachschen Fixpunktsatz an.

Bemerkungen:

- Newton-Verfahren funktioniert, wenn x_0 nah genug an \bar{x} liegt, denn dann ist $|f'(x_0)|$ klein und $r > 0$ und $K > 0$ können existieren.
- Quadratische Konvergenz bedeutet, dass der Approximationsfehler sich in jedem Schritt quadriert (Beschleunigung der Konvergenz).
- Ein gutes x_0 findet man in der Praxis häufig durch Ausprobieren...
- Das Verfahren kann verbessert werden, so dass für (fast) beliebige Startwerte Konvergenz erzielt werden kann (gedämpftes Newton-Verfahren).

Satz: (Newton-Verfahren)

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf einem Intervall $I \supset [x_0 - r, x_0 + r]$ ($r > 0$) definierte, zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Weiterhin existiere $K \in \mathbb{R}$, $0 < K < 1$ mit

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \right| \leq K \quad \text{für alle } x \in I$$

und

$$\left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| \leq (1 - K)r.$$

Dann hat f genau eine Nullstelle \bar{x} in I und die Newton-Folge konvergiert quadratisch gegen \bar{x} , d.h. es gilt

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq C(x_n - \bar{x})^2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Außerdem gilt die Fehlerabschätzung

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{|f(x_n)|}{M} \quad \text{mit } 0 < M = \min_{x \in I} |f'(x)|.$$

Beweisidee:

- Definiere Hilfsfunktion $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
- Definiere Iterationsfolge $x_{n+1} = g(x_n)$
- Wende auf die Iterationsfolge den Bannachschen Fixpunktsatz an.

Bemerkungen:

- Newton-Verfahren funktioniert, wenn x_0 nah genug an \bar{x} liegt, denn dann ist $|f(x_0)|$ klein und $r > 0$ und $K > 0$ können existieren.
- Quadratische Konvergenz bedeutet, dass der Approximationsfehler sich in jedem Schritt quadriert (Beschleunigung der Konvergenz!).
- Ein gutes x_0 findet man in der Praxis häufig durch *ausprobieren*...
- Das Verfahren kann verbessert werden, so dass für (fast) beliebige Startwerte Konvergenz erzielt werden kann (gedämpftes Newton-Verfahren).

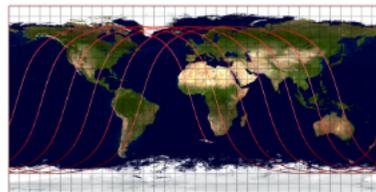
Kurven

Motivation

Anwendungen von Kurven:

- Satelliten-Bahnen
- Flug-Kurven
- Teilchen-Bahnen
- Bewegung von Körpern

Hier:
Beschränkung auf \mathbb{R}^2 !



Definition

Definition: (Kurve in \mathbb{R}^2)
Sei $\gamma: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein abgeschlossenes Intervall, oder Abbildung

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $\gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $\gamma_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Kurvenstück in \mathbb{R}^2 mit

- Anfangspunkt $\gamma(a) = (\gamma_1(a), \gamma_2(a))$,
- Endpunkt $\gamma(b) = (\gamma_1(b), \gamma_2(b))$,
- Spur $\gamma([a, b]) \subseteq \mathbb{R}^2$.

Zur Darstellung der Kurvenpunkte aus dem \mathbb{R}^2 werden Spaltenvektoren verwendet

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = (\gamma_1, \gamma_2)^T$$

Ein Kurvenstück heißt **regulär**, wenn für alle $s \in [a, b]$ gilt:

$$(\dot{\gamma}_1(s))^2 + (\dot{\gamma}_2(s))^2 > 0$$

Für **Parametrisierung** des Kurvenstücks mit dem Parameter t ist geeignet durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix}$$

Durch wachsende Werte des Parameters s ist für das Kurvenstück die **Orientierung** gegeben.

Eine Annäherung von Kurvenstücken γ_i ($i = 1, 2$), wobei der Anfangspunkt von γ_2 der Endpunkt von γ_1 ($t = a_2 = a_1$) entspricht, heißt **Kurve**.

Es ist ein Kurvenstück vorhanden, wenn für sich auch die Kurve bezeichnet.

Bogenlänge einer Kurve

Satz: Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Kurve in \mathbb{R}^2 . Dann gilt:

$$|\dot{\gamma}(s)| = \sqrt{(\dot{\gamma}_1(s))^2 + (\dot{\gamma}_2(s))^2}$$

Es gilt: $|\dot{\gamma}(s)| = \sqrt{(\dot{\gamma}_1(s))^2 + (\dot{\gamma}_2(s))^2}$

Kurventangente

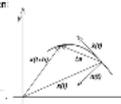
Tangente: Zur Parametrisierung $\gamma(s)$ einer Kurve kann man definieren:

$$\dot{\gamma}(s) = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(s) \\ \dot{\gamma}_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(s) \\ \dot{\gamma}_2(s) \end{pmatrix}$$

Dabei bezeichnet t die Ableitung von $\gamma(s)$, wenn s die Zeit ist.

Definition: $\dot{\gamma}(s)$ heißt **Tangentenvektor** der Kurve $\gamma(s)$ im Punkt $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s))$.

Es gilt: $|\dot{\gamma}(s)| = \sqrt{(\dot{\gamma}_1(s))^2 + (\dot{\gamma}_2(s))^2}$

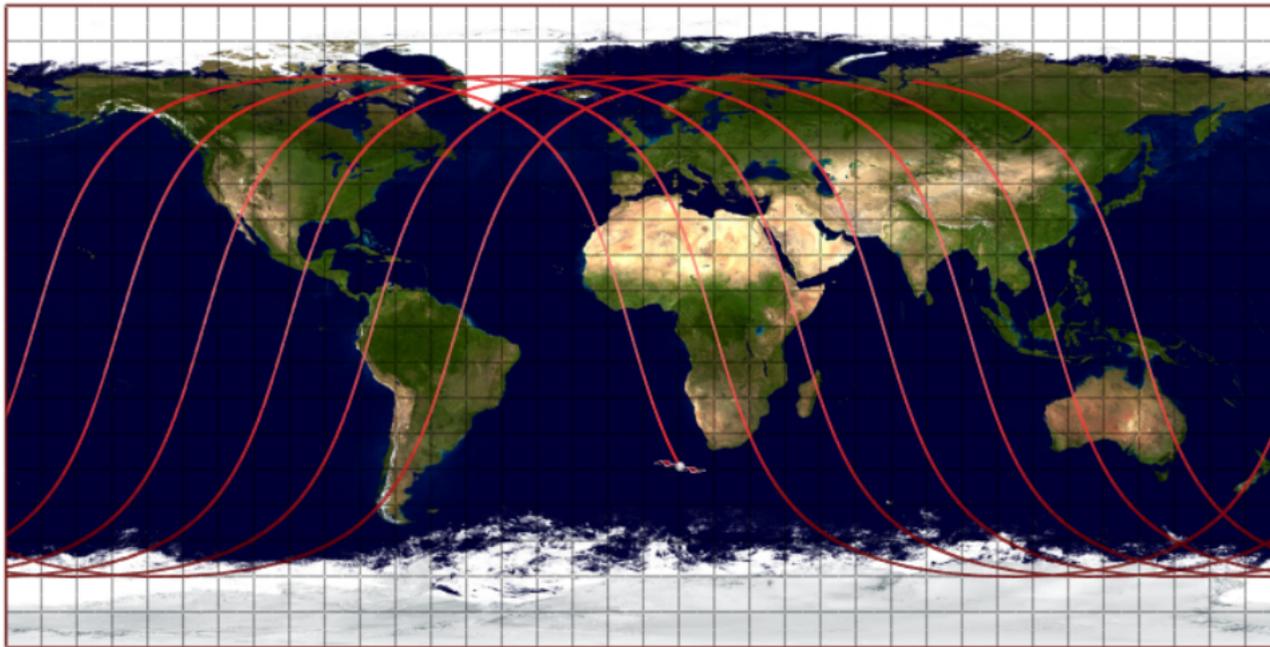


Motivation

Anwendungen von Kurven:

- Satelliten-Bahnen
- Flug-Kurven
- Teilchen-Bahnen
- Bewegung von Körpern

Hier:
Beschränkung auf \mathbb{R}^2 !



Definition

Definition: (Kurve im \mathbb{R}^2)

Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ und $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall. Jede Abbildung

$$\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow G, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $x_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Kurvenstück** in G mit

- **Anfangspunkt** $\mathbf{x}(a) = (x_1(a), x_2(a))^\top$,
- **Endpunkt** $\mathbf{x}(b) = (x_1(b), x_2(b))^\top$,
- **Spur** $\{\mathbf{x}(t) | a \leq t \leq b\}$.

Zur Darstellung der Kurvenpunkte aus dem \mathbb{R}^2 werden Spaltenvektoren verwendet:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2)^\top.$$

Ein Kurvenstück heißt **regulär**, wenn für alle $t \in [a, b]$ gilt:

$$(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2 > 0.$$

Eine **Parameterdarstellung** des Kurvenstücks mit dem Parameter t ist gegeben durch

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Durch wachsende Werte des Parameters t ist für das Kurvenstück eine **Orientierung** gegeben.

Eine Aneinanderreihung von Kurvenstücken K_i ($i = 1 : r$), wobei der Anfangspunkt von K_i dem Endpunkt von K_{i-1} ($i = 2 : r$) entspricht, heißt **Kurve**.

Ist nur ein Kurvenstück vorhanden, wird es oft auch als Kurve bezeichnet.

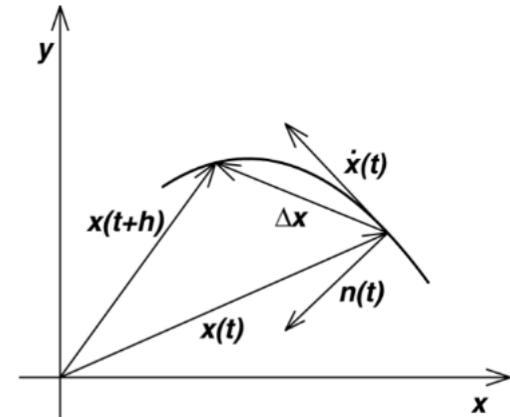
Kurventangente

Tangente: Zur Parameterdarstellung $\mathbf{x}(t)$ einer Kurve kann man definieren:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)}{h} = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix}.$$

Dabei bezeichnet $\dot{x}(t)$ die Ableitung von $x(t)$, wenn t die Zeit ist.

Definition: $\dot{\mathbf{x}}(t)$ heißt **Tangentenvektor** der Kurve $\mathbf{x}(t)$ im Punkt $(x(t), y(t))^T$.



Bemerkungen:

- Für die Tangente T in $(x(t_0), y(t_0))^T$ ergibt sich mit dem Anstieg $\tan \alpha = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}$ die Gleichung

$$y = y(t_0) + \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}(x - x(t_0)). \quad \text{①}$$

- Die Normale N in $(x(t_0), y(t_0))^T$ steht senkrecht auf T , hat also den Anstieg

$$\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{\dot{x}(t_0)}{\dot{y}(t_0)}.$$

Die Gleichung für die Normale lautet also

$$y = y(t_0) - \frac{\dot{x}(t_0)}{\dot{y}(t_0)}(x - x(t_0)).$$

- Einen **Normalenvektor** $\mathbf{n}(t_0)$ in $(x(t_0), y(t_0))^T$, d.h. $\mathbf{n}(t_0)$ steht senkrecht auf $\dot{\mathbf{x}}(t_0)$, erhält man durch

$$\mathbf{n}(t_0) = \begin{pmatrix} -\dot{y}(t_0) \\ \dot{x}(t_0) \end{pmatrix}.$$

Bemerkungen:

- Für die Tangente T in $(x(t_0), y(t_0))^\top$ ergibt sich mit dem Anstieg $\tan \alpha = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}$ die Gleichung

$$y = y(t_0) + \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}(x - x(t_0)).$$

1

- Die Normale N in $(x(t_0), y(t_0))^\top$ steht senkrecht auf T , hat also den Anstieg

$$\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{\dot{x}(t_0)}{\dot{y}(t_0)}.$$

Die Gleichung für die Normale lautet also

$$y = y(t_0) - \frac{\dot{x}(t_0)}{\dot{y}(t_0)}(x - x(t_0)).$$

- Einen **Normalenvektor** $\mathbf{n}(t_0)$ in $(x(t_0), y(t_0))^\top$, d.h. $\mathbf{n}(t_0)$ steht senkrecht auf $\dot{\mathbf{x}}(t_0)$, erhält man durch

$$\mathbf{n}(t_0) = \begin{pmatrix} -\dot{y}(t_0) \\ \dot{x}(t_0) \end{pmatrix}.$$

Bogenlänge einer Kurve

Sekantenlänge: Die Länge der Sekante $c = \mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)$ ist nach *Pythagoras*:

$$c = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(x(t+h) - x(t))^2 + (y(t+h) - y(t))^2}$$

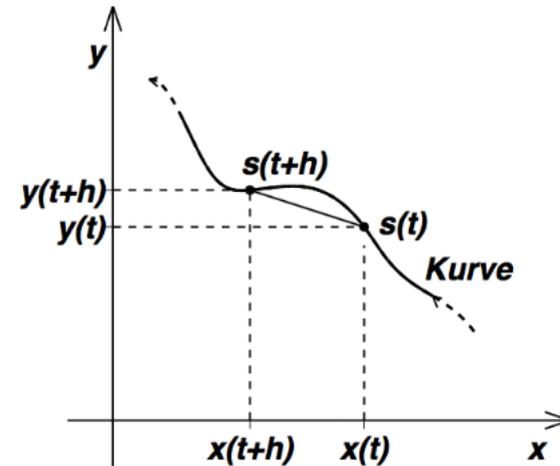
Bogenlänge: Die Länge des Kurvenbogens Δs vom Punkt $\mathbf{x}(t+h)$ bis $\mathbf{x}(t)$ ist für kleines h etwa gleich der Sekantenlänge: $c \approx \Delta s$ ($h \rightarrow 0$).

Andererseits ist die Bogenlänge auch die Differenz der Kurvenlänge $s(t+h)$ und $s(t)$. Also bildet man

$$\frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \sqrt{\left(\frac{x(t+h) - x(t)}{h}\right)^2 + \left(\frac{y(t+h) - y(t)}{h}\right)^2}$$

Für $x(t)$ und $y(t)$ differenzierbar (z.B. reguläre Kurven) lässt sich schreiben

$$\frac{ds}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}$$



2

Bogenlänge: (Bogendifferential)

$$ds := \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt.$$

heißt **Differential der Bogenlänge** (oder Bogenelement), wobei dt das Differential der unabhängigen Variablen t ist.

Idee Newton-Verfahren

Bestimmung der Nullstellen einer (nicht)linearer
 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2 = 0 \iff x = \pm \sqrt{2}$
 Frage: Wie schnell konvergiert das Newton-Verfahren?

Merkmale: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$)
 f ist stetig und differenzierbar
 $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in D$
 f ist zweimal stetig differenzierbar
 $f''(x) \neq 0$ für alle $x \in D$
 f ist lokal umkehrbar
 f ist lokal umkehrbar
 f ist lokal umkehrbar



Analysis I

Weiter 2020/21
 Jörn Behrens
 mit
 Kai Ruffen
 Newton-Verfahren, Kurven
 Buch Band 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

Erinnerung: Fixpunktiteration

Idee: Durch die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die definiert ist durch

$$x_0 \in I, \quad x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

ist im Falle der Konvergenz bei stetiger Funktion f ein Fixpunkt gegeben. Die Folge heißt dann eine **Fixpunkt-Folge**.

Satz: (Banachscher Fixpunktsatz in \mathbb{R})

Sei $f: I \rightarrow I$ eine Funktion auf die $I \subseteq \mathbb{R}$ in sich abbildet. Weiter gelte für alle $x, y \in I$

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

mit einem stetig-abbildbaren Konstanten $0 < K < 1$. Dann hat f genau einen Fixpunkt $\xi \in I$ und die durch $x_{n+1} = f(x_n)$ definierte Iterationsfolge (x_n) konvergiert für jeden beliebigen Anfangswert $x_0 \in I$ gegen diesen Fixpunkt.



Newton-Verfahren

Satz: (Newton-Verfahren)

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ($I = [a, b]$ oder $I =]a, b[$) definierte, zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Weiterhin gelte für $K \in \mathbb{R}$, $0 < K < 1$ gilt

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^3} \right| \leq K \quad \text{für alle } x \in I$$

und

$$\left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| \leq (1 - K)^{-1}$$

Dann hat f genau eine Nullstelle ξ in I und die Newton-Folge konvergiert quadratisch gegen ξ , d.h. es gilt

$$|x_{n+1} - \xi| \leq C|x_n - \xi|^2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Außerdem gilt die Fehlerabschätzung

$$|x_n - \xi| \leq \frac{C|x_0 - \xi|}{M} \quad \text{mit } 0 < M = \min_{x \in I} |f'(x)|.$$

Beispiel:
 Bestimmung der Nullstelle ξ von $f(x) = x^2 - 2$
 mit dem Newton-Verfahren
 (siehe auch die Folie zur Fehlerabschätzung)

Kurven

Motivation

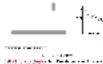
- Anwendungen von Kurven:
 - Populationen
 - Wirtschaft
 - Physikalische Bewegungen
 - Biologische Vorgänge



Definition

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Kurve $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung, die jedem $t \in I$ einen Punkt $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ zuordnet. Die Kurve γ ist **regulär**, wenn $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ gilt. Die Kurve γ ist **stückweise regulär**, wenn γ in endlich vielen Intervallen $I_j \subseteq I$ regulär ist.

Zusammenhang einer Kurve



Kurventangente

Die Kurventangente an einem Punkt $\gamma(t_0)$ ist die Gerade, die durch $\gamma(t_0)$ verläuft und die Richtung des Vektors $\gamma'(t_0)$ hat.