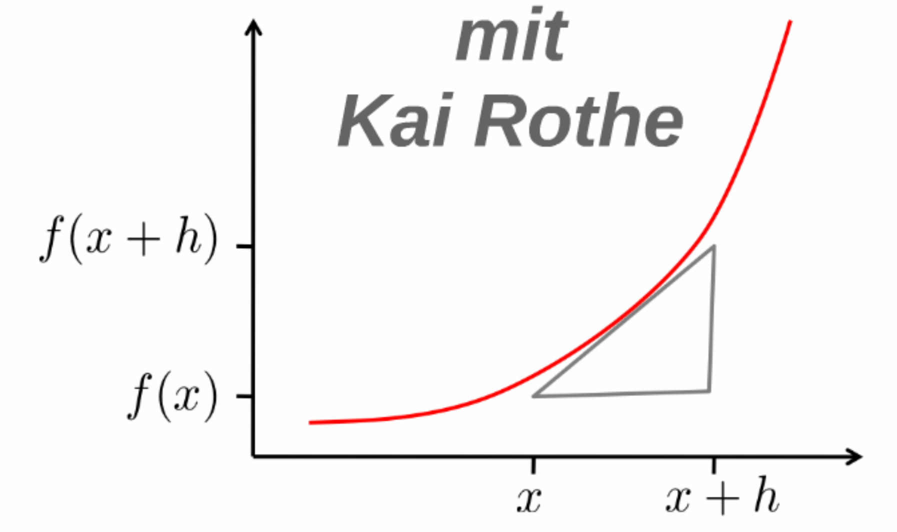
Analysis I

Winter 2016/17

Jörn Behrens
mit
Kai Rothe



Newton-Verfahren, Kurven

Buch Kapitel 2.11 und 2.12

Lehre braucht Feedback!

https://checking.tuhh.de/ce/c2b785bd/de.html

- Bitte bewerten Sie jetzt meine Lehrveranstaltung online
- Teilnahme ist auch später möglich
- Die Eingabe und Auswertung ihrer Angaben ist vollkommen anonym
- Bei Fragen wenden Sie sich an: evaluation@tuhh.de

Vielen Dank für Ihre Teilnahme!

2. Berechne Schnittpunkt de
x-Achse.

3. Wähle diesen Wert als neu

Erinnerung: Fixpunktiteration

Idee: Durch die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die definiert ist durch

$$x_0 \in I, \quad x_{n+1} = f(x_n),\ n = 0, 1, \ldots$$

ist im Falle der Konvergenz bei stetiger Funktion f ein Fixpunkt gegeben.
Die Folge heißt dann eine Fixpunkt-Folge.

Satz: (Bannachscher Fixpunktsatz in $\mathbb{R}$)

Sei $f : I \to I$ eine Funktion die $I \subset \mathbb{R}$ in sich abbildet. Weiter gelte für alle $x, y \in I$

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

mit einer von x, y unabhängigen Konstanten $0 < K < 1$. Dann hat f genau einen Fixpunkt $\bar{x} \in I$ und die durch $x_{n+1} = f(x_n)$ definierte Iterationsfolge (x_n) konvergiert für jeden beliebigen Anfangspunkt $x_0 \in I$ gegen diesen Fixpunkt.

Idee: Durch die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die definiert ist durch

$$x_0 \in I, \quad x_{n+1} = f(x_n),\ n = 0, 1, \ldots$$

ist im Falle der Konvergenz bei stetiger Funktion f ein Fixpunkt gegeben.
Die Folge heißt dann eine Fixpunkt-Folge.

Satz: (Bannachscher Fixpunktsatz in $\mathbb{R}$)

Sei $f : I \to I$ eine Funktion die $I \subset \mathbb{R}$ in sich abbildet. Weiter gelte für alle $x, y \in I$

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

mit einer von x, y unabhängigen Konstanten $0 < K < 1$. Dann hat f genau einen Fixpunkt $\bar{x} \in I$ und die durch $x_{n+1} = f(x_n)$ definierte Iterationsfolge (x_n) konvergiert für jeden beliebigen Anfangspunkt $x_0 \in I$ gegen diesen Fixpunkt.

Idee
Newton-Verfahren

Beobachtung: Die Fixpunkt-Iteration benötigt zwei wichtige Voraussetzungen:

1. $f : I \to I$,
2. $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ mit $|K| < 1$, $x, y \in I$.

Frage: Was können wir tun, wenn diese Voraussetzungen nicht erfüllt sind?

Idee: Nach der Taylor-Formel ist die Tangente für x in der Nähe einer Nullstelle $\bar{x}$

$$g(x) = f(x) - f'(x)(x - x)$$

eine gute (erste) Näherung an die Funktion. Ein Algorithmus könnte also aus folgenden Schritten bestehen:

1. Wähle x_0 in der Nähe von $\bar{x}$.
2. Berechne Schnittpunkt der Tangente $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ mit x-Achse.
3. Wähle diesen Wert als neues x_1 und fahre fort.

Iteration: Setze also

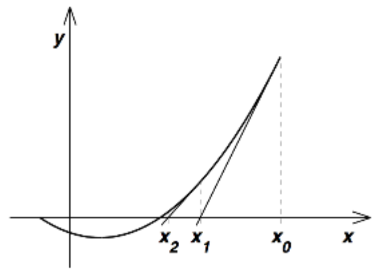
$$g(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Dabei muss $f'(x) \neq 0$ gelten.

Allgemein: Definiere Iteration (Newton-Folge)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Frage: Unter welchen Bedingungen konvergiert die Newton-Folge?



N

Satz: (

Sei f :
zweimal
existiere

Beobachtung: Die Fixpunkt-Iteration benötigt zwei wichtige Voraussetzungen:

1. $f : I \to I$,
2. $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ mit $|K| < 1$, $x, y \in I$.

Frage: Was können wir tun, wenn diese Voraussetzungen nicht erfüllt sind?

Idee: Nach der Taylor-Formel ist die Tangente für x in der Nähe einer Nullstelle $\bar{x}$

$$g(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x})$$

eine gute (erste) Näherung an die Funktion. Ein Algorithmus könnte also aus folgenden Schritten bestehen:

1. Wähle x_0 in der Nähe von $\bar{x}$,
2. Berechne Schnittpunkt der Tangente $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ mit x-Achse.
3. Wähle diesen Wert als neues x_1 und fahre fort.

Iteration: Setze also

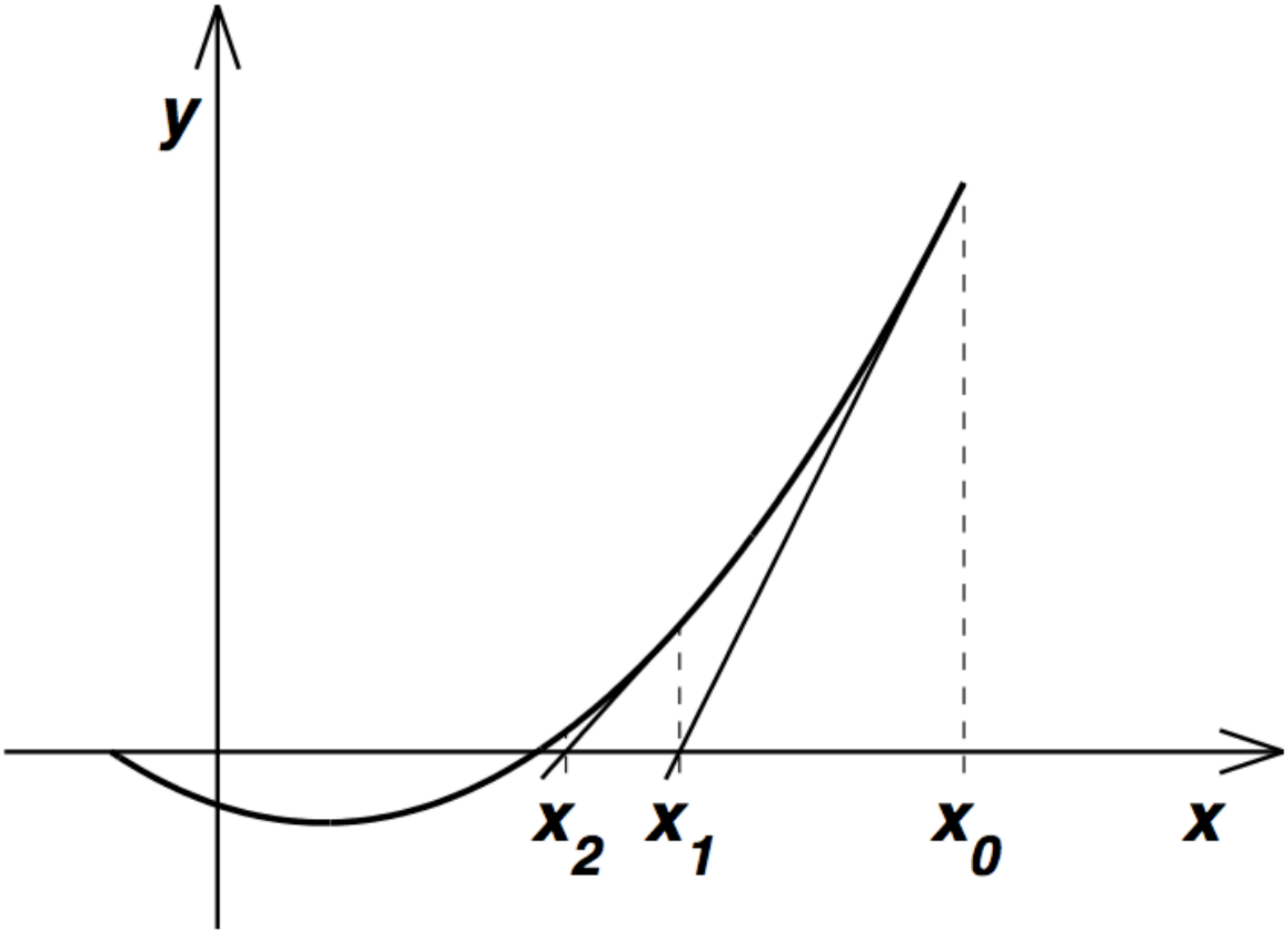
$$g(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Dabei muss $f'(x) \neq 0$ gelten.

Allgemein: Definiere Iteration (Newton-Folge)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Frage: Unter welchen Bedingungen konvergiert die Newton-Folge?


y
x₂
x₁
x₀
x

Newton-Verfahren

Satz: (Newton-Verfahren)

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine auf einem Intervall $I \supset [x_0 - r, x_0 + r]$ $(r > 0)$ definierte, zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Weiterhin existiere $K \in \mathbb{R}$, $0 < K < 1$ mit

$$\left| \frac{f(x) f''(x)}{f'(x)^2} \right| \leq K \quad \text{für alle } x \in I$$

und

$$\left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| \leq (1 - K) r.$$

Dann hat f genau eine Nullstelle $\bar{x}$ in I und die Newton-Folge konvergiert quadratisch gegen $\bar{x}$, d.h. es gilt

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq C (x_n - \bar{x})^2 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Außerdem gilt die Fehlerabschätzung

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{|f(x_n)|}{M} \quad \text{mit } 0 < M = \min_{x \in I} |f'(x)|.$$

python

Beweisidee:

- Definiere Hilfsfunktion $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
- Definiere Iterationsfolge $x_{n+1} = g(x_n)$
- Wende auf die Iterationsfolge den Bannachschen Fixpunktsatz an.

Bemerkungen:

- Newton-Verfahren funktioniert, wenn x_0 nah genug an $\bar{x}$ liegt, denn dann ist $|f(x_0)|$ klein und $r > 0$ und $K > 0$ können existieren.
- Quadratische Konvergenz bedeutet, dass der Approximationsfehler sich in jedem Schritt quadriert (Beschleunigung der Konvergenz!).
- Ein gutes x_0 findet man in der Praxis häufig durch ausprobieren...
- Das Verfahren kann verbessert werden, so dass für (fast) beliebige Startwerte Konvergenz erzielt werden kann (gedämpftes Newton-Verfahren).

Satz: (Newton-Verfahren)

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine auf einem Intervall $I \supset [x_0 - r, x_0 + r]$ $(r > 0)$ definierte, zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Weiterhin existiere $K \in \mathbb{R}$, $0 < K < 1$ mit

$$\left| \frac{f(x) f''(x)}{f'(x)^2} \right| \leq K \quad \text{für alle } x \in I$$

und

$$\left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| \leq (1 - K) r.$$

Dann hat f genau eine Nullstelle $\bar{x}$ in I und die Newton-Folge konvergiert quadratisch gegen $\bar{x}$, d.h. es gilt

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq C (x_n - \bar{x})^2 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Außerdem gilt die Fehlerabschätzung

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{|f(x_n)|}{M} \quad \text{mit } 0 < M = \min_{x \in I} |f'(x)|.$$

Beweisidee:

- Definiere Hilfsfunktion $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
- Definiere Iterationsfolge $x_{n+1} = g(x_n)$
- Wende auf die Iterationsfolge den Bannachschen Fixpunktsatz an.

Bemerkungen:

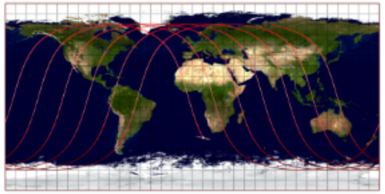
- Newton-Verfahren funktioniert, wenn x_0 nah genug an $\bar{x}$ liegt, denn dann ist $|f(x_0)|$ klein und $r > 0$ und $K > 0$ können existieren.
- Quadratische Konvergenz bedeutet, dass der Approximationsfehler sich in jedem Schritt quadriert (Beschleunigung der Konvergenz!).
- Ein gutes x_0 findet man in der Praxis häufig durch *ausprobieren*...
- Das Verfahren kann verbessert werden, so dass für (fast) beliebige Startwerte Konvergenz erzielt werden kann (gedämpftes Newton-Verfahren).

Kurven

Motivation

Anwendungen von Kurven:
- Satelliten-Bahnen
- Flug-Kurven
- Teilchen-Bahnen
- Bewegung von Körpern

Hier:
Beschränkung auf $\mathbb{R}^2$!



Definition

Definition. (Kurve im $\mathbb{R}^2$)
Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ und $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall. Jede Abbildung

$$x : [a,b] \to G, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $x_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $x_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Kurvenstück in G mit

- Anfangspunkt $x(a) = (x_1(a), x_2(a))^T$,
- Endpunkt $x(b) = (x_1(b), x_2(b))^T$,
- Spur $\{x(t) : a \le t \le b\}$.

Zur Darstellung der Kurvenpunkte aus dem $\mathbb{R}^2$ werden Spaltenvektoren verwendet:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2)^T.$$

Ein Kurvenstück heißt regulär, wenn für alle $t \in [a,b]$ gilt:

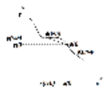
$$(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2 > 0.$$

Eine Parameterdarstellung des Kurvenstücks mit dem Parameter t ist gegeben durch

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Durch wachsende Werte des Parameters t ist für das Kurvenstück eine Orientierung gegeben.
Eine Aneinanderreihung von Kurvenstücken K_i $(i = 1 : r)$, wobei der Anfangspunkt von K_i dem Endpunkt von K_{i-1} $(i = 2 : r)$ entspricht, heißt Kurve.
Ist nur ein Kurvenstück vorhanden, wird es oft auch als Kurve bezeichnet.

Bogenlänge einer Kurve



Bogenlänge (Bogendifferential)

$$ds := \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,dt$$

heißt Differential der Bogenlänge (oder Bogenelement), wobei dt das Differential der unabhängigen Variablen t ist.

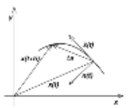
Kurventangente

Tangente: Zur Parameterdarstellung $x(t)$ einer Kurve kann man definieren:

$$\dot{x}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix}.$$

Dabei bezeichnet $\dot{x}(t)$ die Ableitung von $x(t)$, wenn t die Zeit ist.

Definition. $\dot{x}(t)$ heißt Tangentenvektor der Kurve $x(t)$ im Punkt $(x(t), y(t))^T$.

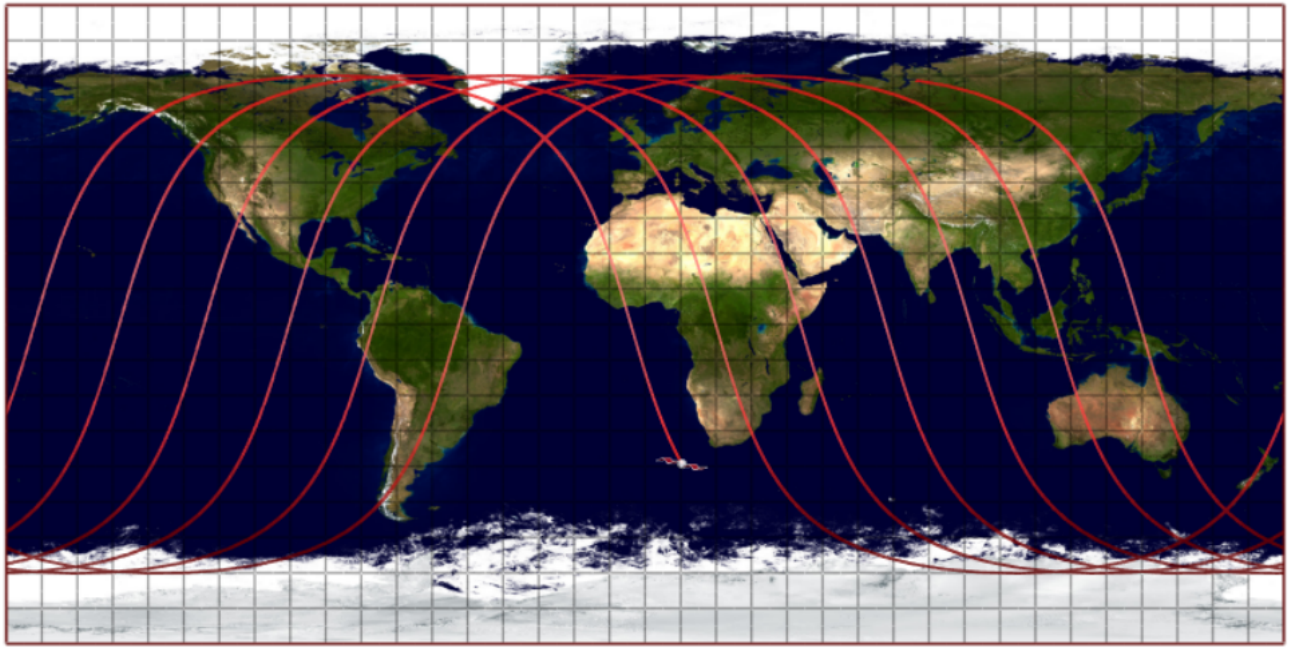


Motivation

Anwendungen von Kurven:

- Satelliten-Bahnen
- Flug-Kurven
- Teilchen-Bahnen
- Bewegung von Körpern

Hier:
Beschränkung auf $\mathbb{R}^2$!



Definition

Definition: (Kurve im $\mathbb{R}^2$)
Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ und $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall. Jede Abbildung

$$\mathbf{x} : [a,b] \to G, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $x_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $x_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Kurvenstück in G mit

- Anfangspunkt $\mathbf{x}(a) = (x_1(a), x_2(a))^\top$,
- Endpunkt $\mathbf{x}(b) = (x_1(b), x_2(b))^\top$,
- Spur $\{\mathbf{x}(t) | a \leq t \leq b\}$.

Zur Darstellung der Kurvenpunkte aus dem $\mathbb{R}^2$ werden Spaltenvektoren verwendet:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2)^\top.$$

Ein Kurvenstück heißt regulär, wenn für alle $t \in [a,b]$ gilt:

$$\left(x_1'(t)\right)^2 + \left(x_2'(t)\right)^2 > 0.$$

Eine Parameterdarstellung des Kurvenstücks mit dem Parameter t ist gegeben durch

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

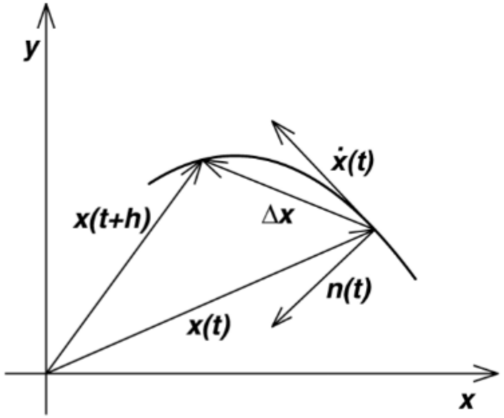
Durch wachsende Werte des Parameters t ist für das Kurvenstück eine Orientierung gegeben.
Eine Aneinanderreihung von Kurvenstücken K_i $(i = 1 : r)$, wobei der Anfangspunkt von K_i dem Endpunkt von K_{i-1} $(i = 2 : r)$ entspricht, heißt Kurve.
Ist nur ein Kurvenstück vorhanden, wird es oft auch als Kurve bezeichnet.

Kurventangente

Tangente: Zur Parameterdarstellung $\mathbf{x}(t)$ einer Kurve kann man definieren:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)}{h} = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix}.$$

Dabei bezeichnet $\dot{x}(t)$ die Ableitung von $x(t)$, wenn t die Zeit ist.



Definition: $\dot{\mathbf{x}}(t)$ heißt Tangentenvektor der Kurve $\mathbf{x}(t)$ im Punkt $(x(t), y(t))^\top$.

Bemerkungen:

- Für die Tangente T in $(x(t_0), y(t_0))^\top$ ergibt sich mit dem Anstieg $\tan\alpha = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}$ die Gleichung

$$y = y(t_0) + \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}(x - x(t_0)).$$

1

- Die Normale N in $(x(t_0), y(t_0))^\top$ steht senkrecht auf T, hat also den Anstieg

$$\tan(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \frac{\sin(\alpha + \frac{\pi}{2})}{\cos(\alpha + \frac{\pi}{2})} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\frac{1}{\tan\alpha} = -\frac{\dot{x}(t_0)}{\dot{y}(t_0)}.$$

  Die Gleichung für die Normale lautet also

$$y = y(t_0) - \frac{\dot{x}(t_0)}{\dot{y}(t_0)}(x - x(t_0)).$$

- Einen Normalenvektor $\mathbf{n}(t_0)$ in $(x(t_0), y(t_0))^\top$, d.h. $\mathbf{n}(t_0)$ steht senkrecht auf $\dot{\mathbf{x}}(t_0)$, erhält man durch

$$\mathbf{n}(t_0) = \begin{pmatrix} -\dot{y}(t_0) \\ \dot{x}(t_0) \end{pmatrix}.$$

Bemerkungen:

- Für die Tangente T in $\big(x(t_0), y(t_0)\big)^\top$ ergibt sich mit dem Anstieg $\tan\alpha = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}$ die Gleichung

$$y = y(t_0) + \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}(x - x(t_0)).$$

- Die Normale N in $\big(x(t_0), y(t_0)\big)^\top$ steht senkrecht auf T, hat also den Anstieg

$$\tan(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \frac{\sin(\alpha + \frac{\pi}{2})}{\cos(\alpha + \frac{\pi}{2})} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\frac{1}{\tan\alpha} = -\frac{\dot{x}(t_0)}{\dot{y}(t_0)}.$$

  Die Gleichung für die Normale lautet also

$$y = y(t_0) - \frac{\dot{x}(t_0)}{\dot{y}(t_0)}(x - x(t_0)).$$

- Einen Normalenvektor $\mathbf{n}(t_0)$ in $\big(x(t_0), y(t_0)\big)^\top$, d.h. $\mathbf{n}(t_0)$ steht senkrecht auf $\dot{\mathbf{x}}(t_0)$, erhält man durch

$$\mathbf{n}(t_0) = \begin{pmatrix} -\dot{y}(t_0) \\ \dot{x}(t_0) \end{pmatrix}.$$

Bogenlänge einer Kurve

Sekantenlänge: Die Länge der Sekante $c = \mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)$ ist nach *Pythagoras*:

$$c = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{\big(x(t+h) - x(t)\big)^2 + \big(y(t+h) - y(t)\big)^2}$$

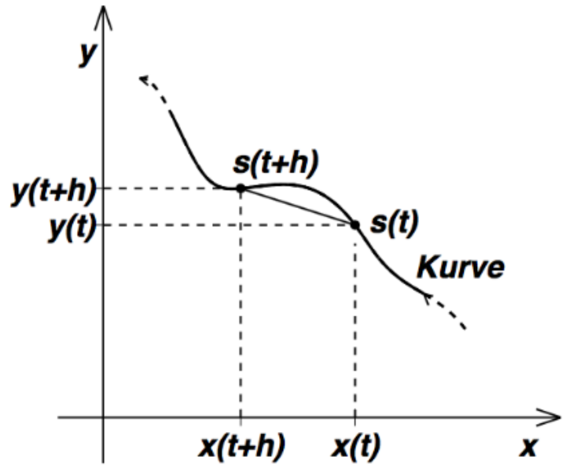
Bogenlänge: Die Länge des Kurvenbogens Δs vom Punkt $\mathbf{x}(t+h)$ bis $\mathbf{x}(t)$ ist für kleines h etwa gleich der Sekantenlänge: $c \approx \Delta s$ $(h \to 0)$.

Andererseits ist die Bogenlänge auch die Differenz der Kurvenlänge $s(t+h)$ und $s(t)$. Also bildet man

$$\frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \sqrt{\left(\frac{x(t+h) - x(t)}{h}\right)^2 + \left(\frac{y(t+h) - y(t)}{h}\right)^2}.$$

Für $x(t)$ und $y(t)$ differenzierbar (z.B. reguläre Kurven) lässt sich schreiben

$$\frac{ds}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}.$$



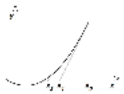
2

Bogenlänge: (Bogendifferential)

$$ds := \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt.$$

heißt Differential der Bogenlänge (oder Bogenelement), wobei dt das Differential der unabhängigen Variablen t ist.

Idee Newton-Verfahren



Erinnerung: Fixpunktiteration

Idee: Durch die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die definiert ist durch

$$x_0 \in I, \quad x_{n+1} = f(x_n),\ n = 0, 1, \dots$$

ist im Falle der Konvergenz bei stetiger Funktion f ein Fixpunkt gegeben.
Die Folge heißt dann eine Fixpunkt-Folge.

Satz: (Banachscher Fixpunktsatz in $\mathbb{R}$)

Sei $f: I \to I$ eine Funktion die $I \subset \mathbb{R}$ in sich abbildet. Weiter gelte für alle $x, y \in I$

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

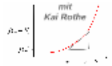
mit einer von x, y unabhängigen Konstanten $0 \leq K < 1$. Dann hat f genau einen Fixpunkt $\bar{x} \in I$ und die durch $x_{n+1} = f(x_n)$ definierte Iterationsfolge (x_n) konvergiert für jeden beliebigen Anfangspunkt $x_0 \in I$ gegen diesen Fixpunkt.

python

Analysis I

Winter 2016/17

Jörn Behrens
mit
Kai Rothe



Newton-Verfahren, Kurven

Buch Kapitel 2.11 und 2.12

Newton-Verfahren

Satz: (Newton-Verfahren)

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine auf einem Intervall $I \supset [x_0 - r, x_0 + r]$ $(r > 0)$ definierte, zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Weiterhin existiere $K \in \mathbb{R}$, $0 < K < 1$ mit

$$\left|\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}\right| \leq K \quad \text{für alle } x \in I$$

und

$$\left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right| \leq (1 - K)r.$$

Dann hat f genau eine Nullstelle $\bar{x}$ in I und die Newton-Folge konvergiert quadratisch gegen $\bar{x}$, d.h. es gilt

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq C(x_n - \bar{x})^2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

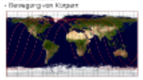
mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Außerdem gilt die Fehlerabschätzung

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{|f(x_n)|}{M} \quad \text{mit } 0 < M = \min_{x \in I} |f'(x)|.$$

python

Kurven

Motivation



Definition

Bogenlänge einer Kurve

Kurventangente