Analysis I

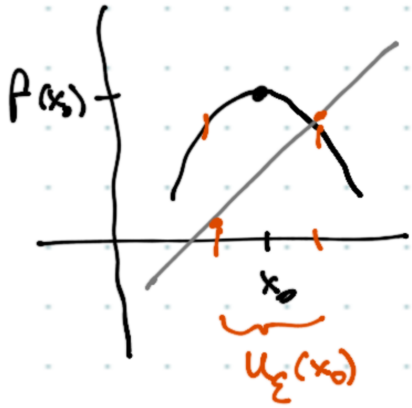
10.01.2017

J. Behrens

① Notwendige Bedingung für lokales Maximum

Sei x_0 lokales Maximum, x_0 kein Randpunkt

- $\Rightarrow \exists\, U_\varepsilon(x_0) \subset I$ mit $f(x_0) - f(x) \geq 0 \quad \forall x \in U_\varepsilon(x_0)$



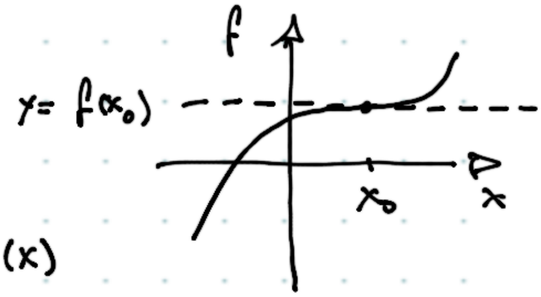
- $\Rightarrow f'(x_0) = \lim\limits_{x \searrow x_0} \dfrac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq 0$

$$f'(x_0) = \lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \geq 0$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = 0 \qquad \boxtimes$$

- Analog für lokales Minimum.

② Hinreichende Bedingung für lokale Extrema:



- Betrachte Taylor-Polynom $T_1(x)$ von f an x_0:

$$f(x) = T_1(x) + R_1(x) = f(x_0) + R_1(x)$$

- $\Rightarrow \; f(x) - f(x_0) = \frac{f''(x_0 - \vartheta(x-x_0))}{2!}(x-x_0)^2$
- $(x-x_0)^2 > 0$ falls $x \neq x_0$
- $f''(x_0) > 0 \;\Rightarrow\; f''(x) > 0$ in $U_\delta(x_0)$

Max. $<$

$$\Rightarrow \frac{f''(x_0+\vartheta(x-x_0))}{2!} > 0$$

- $\Rightarrow \; f(x) - f(x_0) > 0 \;\Rightarrow\; f(x) > f(x_0) \;\forall x \in U_\delta(x_0)$

  Also nimmt f an x_0 in $U_\delta(x_0)$ lokales Minimum an.
- Analoges Vorgehen für lokales Maximum
- Bleibt zu zeigen: Wendepunkt.

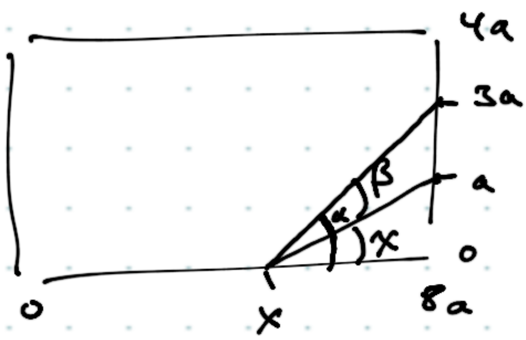
  Sei also $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ und $f^{(3)}(x_0) \neq 0$

$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2}_{=0} + \frac{1}{3!} f^{(3)}(x_0+\vartheta(x-x_0)) \cdot (x-x_0)^3$$

  das heißt $(x-x_0)^3$ wechselt beim passieren von x_0 das Vorzeichen
- Also f schneidet in x_0 die Tangente $y = f(x_0) = \text{const.}$

  $\Rightarrow x_0$ Wendepunkt ☒

③ Optimale Sitzposition



<u>Ziel</u>: β maximal
(großer Blickwinkel!)

$\Longrightarrow$ Bestimme optimalen x.

<u>Mathematisierung</u>: $\beta = \alpha - \chi$, $\alpha = \alpha(x)$
$\chi = \chi(x)$

$$\beta(x) = \arctan \frac{3a}{8a - x} - \arctan \frac{a}{8a-x}$$

<u>Wir wissen</u>: $\beta(x)$ ist maximal, falls $\beta'(x) = 0$ und $\beta''(x) < 0$.

Man rechnet mit Hilfe einer Formelsammlung

$$\beta'(x) = \frac{3a}{(8a-x)^2 - 9a^2} - \frac{a}{(8a-x)^2 + a^2} \overset{!}{=} 0$$

$\vdots$

$\Longrightarrow$ $x_{1/2} = 8a \pm \sqrt{3}\, a$ sind Nullstellen

Da wir die Lösung in $x \in [0, 8a]$ suchen ist $x = (8 - \sqrt{3})a$

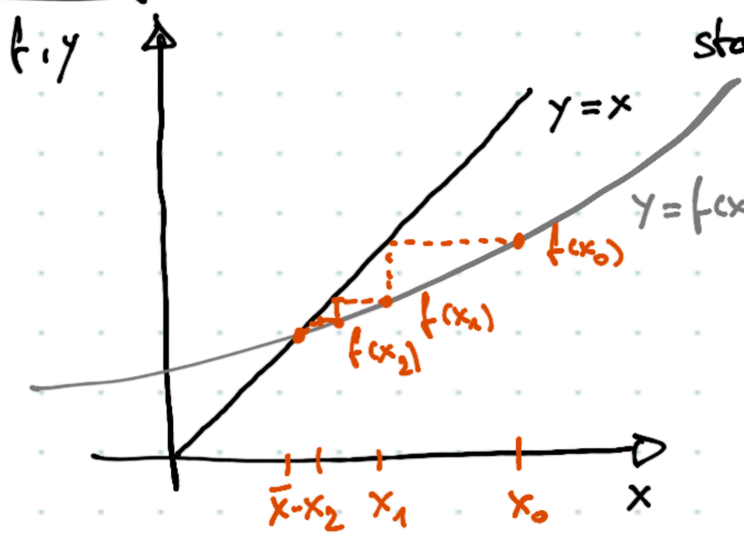
Prüfe nun β'' ; $\beta''(x) = \frac{6a(8a-x)}{((8a-x)^2 + 9a^2)^2} - \frac{2a(8a-x)}{((8a-x)^2 + a^2)^2}$

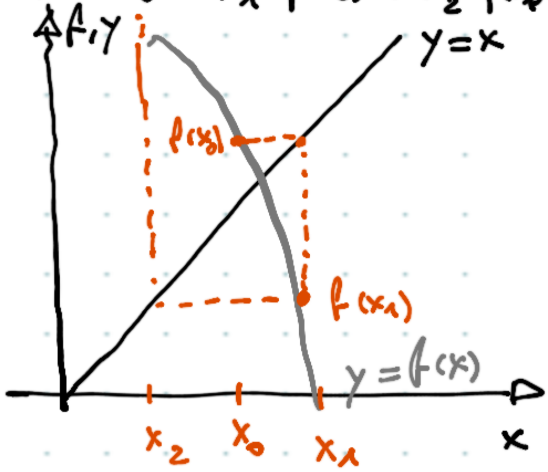
Einsetzen von $x = (8 - \sqrt{3})a$ $\Longrightarrow$ $\beta''((8-\sqrt{3})a) = -\frac{\sqrt{3}}{12a^2} < 0$.

④ Banachscher Fixpunktsatz

<u>Vorbemerkung</u>: Kontraktion $\quad f(\bar{x}) = \bar{x}$

starte mit $x_0 \rightarrow x_1 = f(x_0) \rightarrow x_2 = f(x_1) \ldots$





$$|f(x) - f(y)| < K\,|x-y|$$

$$\Rightarrow \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} < |K| < 1\,!$$

<u>Beweis</u> (Beweisidee)

- Es gilt $|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq K\,|x_n - x_{n-1}|$ $\quad n = 1, 2, \ldots$
- Also auch $|x_{n+1} - x_n| \leq K\,|x_n - x_{n-1}| \leq K^2\,|x_{n-1} - x_{n-2}| \ldots$

  $\leq K^n\,|x_1 - x_0|$
- $n < m \quad |x_n - x_m| \leq \dfrac{K^n}{1-K}\,|x_1 - x_0|$
- Da $K < 1 \Rightarrow K^n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$

  Daher $\exists\, n_0 : \forall\, n \geq n_0$ und vorgegebenes $\varepsilon > 0 : |x_n - x_m| < \varepsilon$

- Da dies für alle $m > n \geq n_0$ gilt konvergiert (x_n) nach Satz von Cauchy (Konvergenzkriterium) gegen Grenzwert $\bar{x}$
- $\bar{x}$ ist Fixpunkt denn

$$|\bar{x} - f(\bar{x})| = |\bar{x} - x_n + x_n - f(\bar{x})| \leq |\bar{x} - x_n| + |x_n - f(\bar{x})|$$

$$= |\bar{x} - x_n| + |f(x_{n-1}) - f(\bar{x})|$$

$$\leq |\bar{x} - x_n| + K|x_{n-1} - \bar{x}| \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

- $\bar{x}$ ist eindeutig Widerspruchsbeweis.

$\boxtimes$

Analysis I

12.01.2017

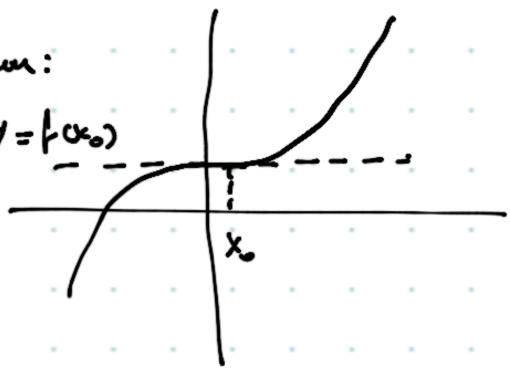
① Notwendige Bed. f. lokales Maximum:

- Sei x_0 lokale Maximalstelle, x_0 kein Randpunkt.
- $\Rightarrow \; \exists\, U_\varepsilon(x_0) \subset I$ mit $f(x_0) - f(x) \geq 0 \quad \forall x \in U_\varepsilon(x_0)$
- $\Rightarrow \quad f'(x_0) = \lim\limits_{x \searrow x_0} \dfrac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq 0$

$$f'(x_0) = \lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \geq 0$$

- $\Rightarrow \quad f'(x_0) = 0 \qquad \boxtimes$

② Hinreichende Bed. f. lokales Minimum:



- Betrachte Taylor-Polynom $T_1(x)$

$$f(x) = T_1(x) + R_1(x_0)$$

$$= f(x_0) + R_1(x_0)$$

- $\Rightarrow \quad f(x) - f(x_0) = \dfrac{f''(x_0 + \vartheta(x - x_0))}{2!}(x - x_0)^2$

- $(x-x_0)^2 > 0$ falls $(x \neq x_0)$
- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$ für $x \in U_\delta(x_0) \Rightarrow \frac{f''(x_0+\vartheta(x-x_0))}{2!} > 0$
- $\Rightarrow f(x) - f(x_0) > 0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$ in $U_\delta(x_0)$

  d.h. f nimmt lokales Minimum in x_0 an.

- Sei nun $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ und $f^{(3)}(x_0) \neq 0$

  $\Rightarrow (x-x_0)^3$ wechselt beim passieren von x_0 das Vorzeichen.

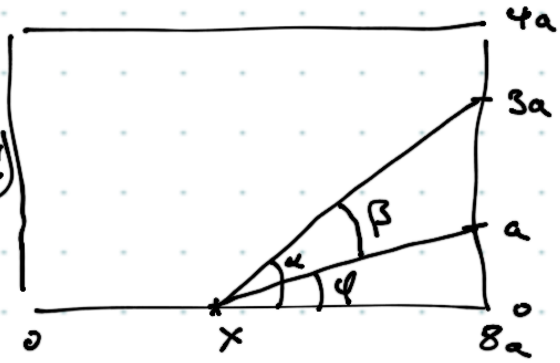
  da: $f(x) - f(x_0) = \underbrace{f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2}_{0} +$

  $$\frac{1}{3!} \underbrace{f^{(3)}(x_0+\vartheta(x-x_0))}_{\neq 0} (x-x_0)^3$$

- f schneidet die Tangente $y = f(x_0)$ in x_0 $\Rightarrow x_0$ Wendepunkt.

$\boxtimes$

(3) Optimale Sitzposition.



Ziel: β maximal (großer Blickwinkel!)

$\to$ bestimme optimal x

Wir wissen: β ist maximal, wenn $\beta'(x) = 0$ und $\beta''(x) < 0$,

Wie berechne ich $\beta(x)$?: $\quad \beta(x) = \alpha(x) - \varphi(x)$

$$\beta(x) = \arctan \frac{3a}{8a-x} - \arctan \frac{a}{8a-x}$$

Mit Formelsammlung: $\beta'(x) = \dfrac{3a}{(8a-x)^2+9a^2} - \dfrac{a}{(8a-x)^2-a^2} \overset{!}{=} 0$

$$\vdots$$

$$x_{1/2} = 8a \pm \sqrt{3}\,a$$

Da wir die Lösung in $[0, 8a]$ suchen ist $x_0 = 8a - \sqrt{3}\,a$ Lösung

Prüfe ob $\beta''(x_0) < 0$: $\quad \beta''(x) = \dfrac{6a(8a-x)}{((8a-x)^2+9a^2)^2} - \dfrac{2a(8a-x)}{((8a-x)^2+a^2)^2}$

Also $\beta''((8-\sqrt{3})a) = \dots = -\dfrac{\sqrt{3}}{12a^2} < 0$

(4) Banachscher Fixpunktsatz: (Beweisidee)

- Es gilt : $|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq K |x_n - x_{n-1}|$

$n = 1, 2, 3 \dots$

- Also auch : $|x_{n+1} - x_n| \leq K |x_n - x_{n-1}| \leq K^2 |x_{n-1} - x_{n-2}| \dots$

$$\leq K^n |x_1 - x_0|$$

- $n < m$: $|x_m - x_n| \leq \frac{K^n}{1-K} |x_1 - x_0|$

- Da $|K| < 1$: $K^n \to 0$ für $n \to \infty$

Daher : $\exists n_0$: $\forall n \geq n_0$ und vorgegeb. $\varepsilon > 0 : |x_m - x_n| < \varepsilon$

- Da dies für alle $m > n \geq n_0$ gilt konvergiert (x_n) nach dem Konvergenzsatz von Cauchy gegen Grenzwert $\bar{x}$.

- Zeige : $\bar{x}$ ist Fixpunkt :

$$|\bar{x} - f(\bar{x})| = |\bar{x} - x_n + x_n - f(\bar{x})| \leq |\bar{x} - x_n| + |x_n - f(\bar{x})|$$

$$= |\bar{x} - x_n| + |f(x_{n-1}) - f(\bar{x})|$$

$$\leq |\bar{x} - x_n| + K |x_{n-1} - \bar{x}| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

- Eindeutigkeit: Annahme $\bar{x}$ und $\bar{\bar{x}}$ beides Fixpunkte von $x = f(x)$

Wäre $\bar{x} \neq \bar{\bar{x}}$:

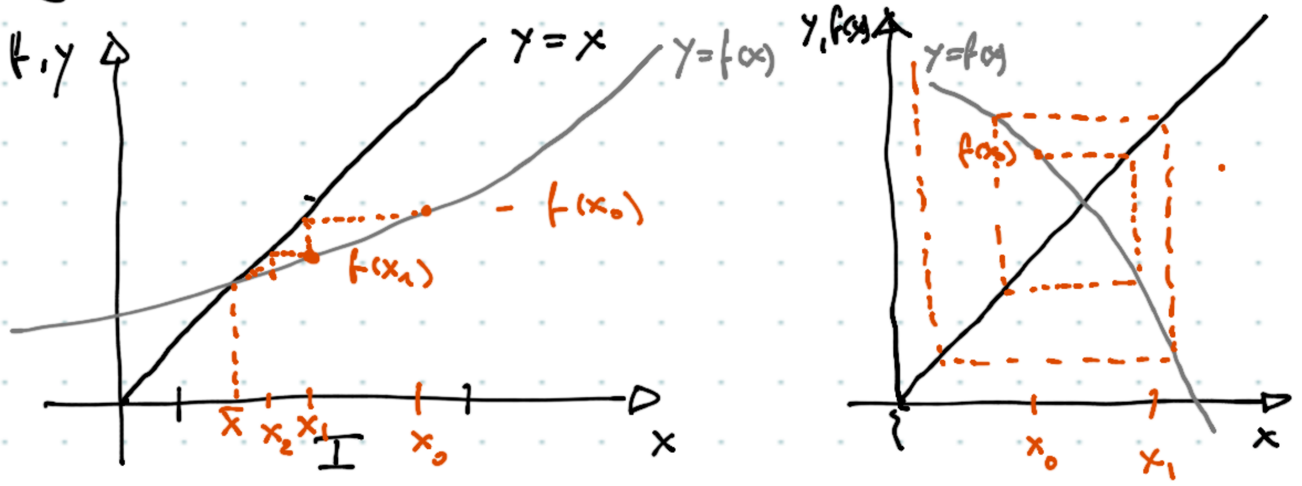
$$|\bar{x} - \bar{\bar{x}}| = |f(\bar{x}) - f(\bar{\bar{x}})| \leq K |\bar{x} - \bar{\bar{x}}| < |\bar{x} - \bar{\bar{x}}| \text{ da } K < 1$$

$\lightning$

D.h. $\bar{x} = \bar{\bar{x}}$

$\boxtimes$

Graphisch:



$|k| < 1$ $\qquad$ $|k| > 1$