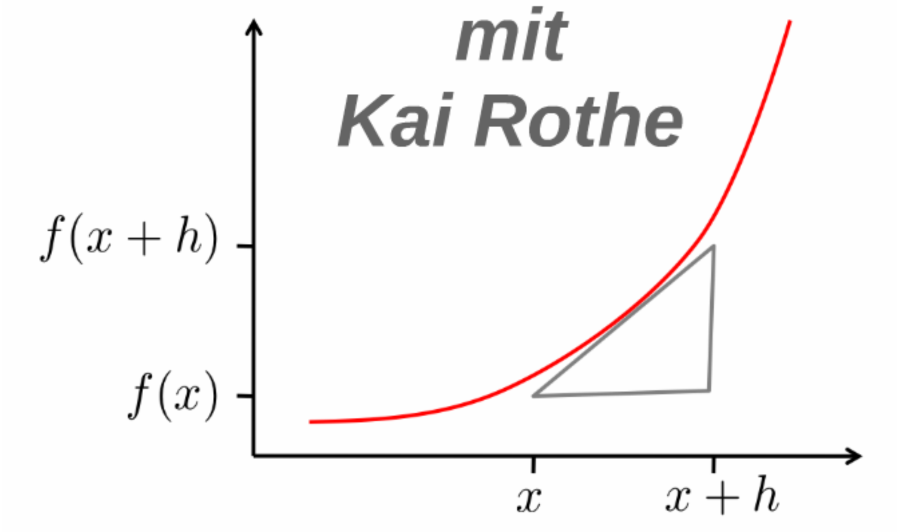
Analysis I

Winter 2016/17

Jörn Behrens
mit
Kai Rothe



Extremalprobleme und Nullstellen

Buch Kapitel 2.10 und 2.11

Erinnerung:
Satz von Taylor

Satz: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall I $(n+1)$-mal differenzierbar.
Sei weiter $x_0 \in I$ fest.
Dann gibt es für alle $x \in I$ und zu jedem $p \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$ mindestens ein ξ zwischen x und x_0, so dass

$$f(x) = \sum_{k=0:n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x)$$

mit

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!p}(x - x_0)^p (x - \xi)^{n+1-p}.$$

Die erste Formel heißt Taylor-Formel mit dem Restglied $R_n(x)$ in der Schlömilch-Form.

Ziel jetzt: Notwendige und hinreichende Bedingungen für Extrema von Funktionen

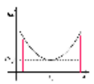
Definition
lokales Extremum

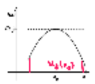
Definition: Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ besitzt im Intervall I in x_0 ein lokales Maximum (Minimum), falls es eine ϵ-Umgebung $U_\epsilon(x_0)$ gibt, in der gilt

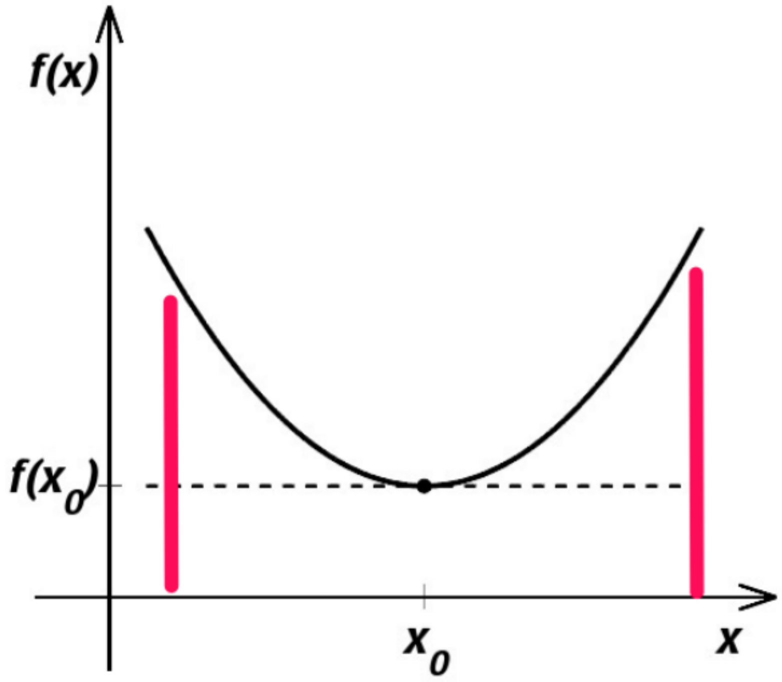
$$f(x_0) \geq (\leq) f(x) \quad \forall x \in I \cap U_\epsilon(x_0).$$

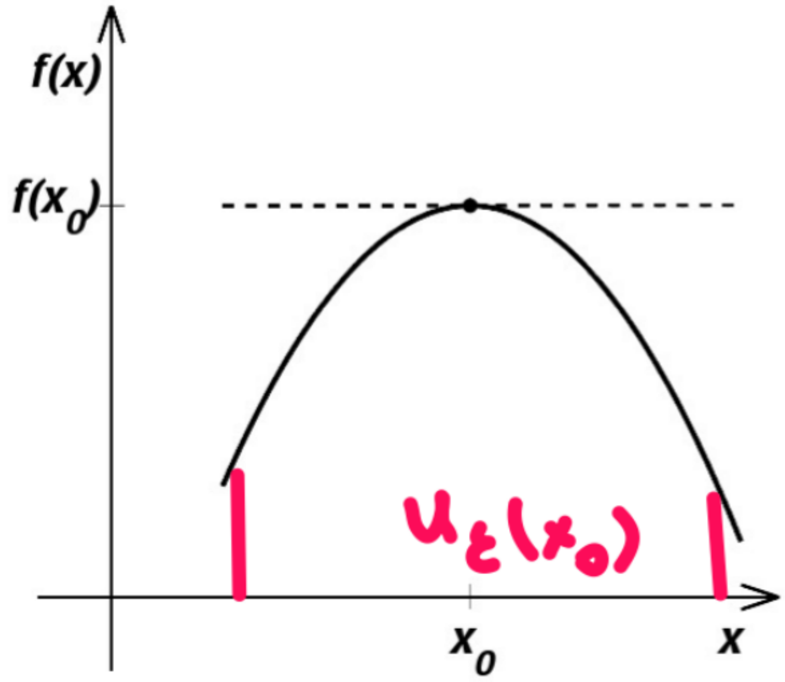
$f(x_0)$ ist also größter (kleinster) Funktionswert in der ϵ-Umgebung.

- x_0 heißt Maximalstelle (Minimalstelle).
- Die Zahl $f(x_0)$ heißt lokales Maximum (Minimum).
- Ist sogar $f(x_0) > f(x)$ (bzw. $f(x_0) < f(x)$), so heißt x_0 echte lokale Maximalstelle (Minimalstelle) und $f(x_0)$ echtes lokales Maximum (Minimum).
- Statt *lokal* sagt man auch relativ.






f(x)
f(x_0)
x_0
x


f(x)
f(x_0)
U_ε(x_0)
x_0
x

Bedingungen für lokale Extrema

Satz: (Notwendige Bedingung für lokale Extrema)

Für jede lokale Extremalstelle x_0 einer auf I differenzierbaren Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ gilt

a) $f'(x_0) = 0$, oder

b) x_0 ist Randpunkt von I.

1

Satz: (Hinreichende Bedingung für lokale Extrema)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ auf einer Umgebung von x_0 zweimal stetig differenzierbar. Wenn für f an der Stelle x_0

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) > 0$$

gilt, dann hat f an der Stelle x_0 ein lokales Minimum. Gilt

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) < 0,$$

so hat f dort ein lokales Maximum.

Ist f in einer Umgebung von x_0 dreimal stetig differenzierbar und gilt

$$f'(x_0) = f''(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(3)}(x_0) \neq 0,$$

dann ist in x_0 ein lokaler Wendepunkt gegeben.

2

Bemerkung: Der Satz (Hinreichende Bedingung für lokale Extrema) lässt sich verallgemeinern:

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ auf einer Umgebung von x_0 n-mal stetig differenzierbar und gelte

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

- Ist n **gerade**, dann hat f an x_0 lokales Extremum, und zwar
  - falls $f^{(n)}(x_0) > 0$ ein lokales Minimum,
  - falls $f^{(n)}(x_0) < 0$ ein lokales Maximum.
- Ist n **ungerade**, so hat f an x_0 einen Wendepunkt.

Satz: (Notwendige Bedingung für lokale Extrema)

Für jede lokale Extremalstelle x_0 einer auf I differenzierbaren Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ gilt

a) $f'(x_0) = 0$, oder

b) x_0 ist Randpunkt von I.

1

Satz: (Hinreichende Bedingung für lokale Extrema)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ auf einer Umgebung von x_0 zweimal stetig differenzierbar. Wenn für f an der Stelle x_0

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) > 0$$

gilt, dann hat f an der Stelle x_0 ein lokales Minimum. Gilt

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) < 0,$$

so hat f dort ein lokales Maximum.

Ist f in einer Umgebung von x_0 dreimal stetig differenzierbar und gilt

$$f'(x_0) = f''(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(3)}(x_0) \neq 0,$$

dann ist in x_0 ein lokaler Wendepunkt gegeben.

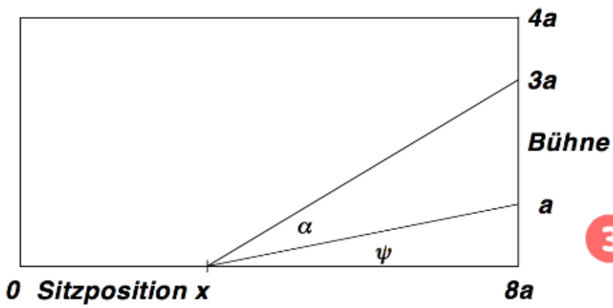
Bemerkung: Der Satz (Hinreichende Bedingung für lokale Extrema) lässt sich verallgemeinern:

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ auf einer Umgebung von x_0 n-mal stetig differenzierbar und gelte

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

- Ist n **gerade**, dann hat f an x_0 lokales Extremum, und zwar
  - falls $f^{(n)}(x_0) > 0$ ein lokales Minimum,
  - falls $f^{(n)}(x_0) < 0$ ein lokales Maximum.
- Ist n **ungerade**, so hat f an x_0 einen Wendepunkt.

Beispiel: Optimale Sitzposition im Fußballstadion



Berechnung von Nullstellen

Wichtige Aufgabenstellung: Finde $x \in D \subset \mathbb{R}$, so dass

$$f(x) = 0,$$

wobei $f : D \to \mathbb{R}$ i.Allg. nichtlineare reelwertige Funktion.

Problem: Häufig ist die Lösung nicht in geschlossener Form verfügbar. Näherungen können mit Hilfe einer Iterationsfolge gewonnen werden. Grundlage dafür ist der Bannachsche Fixpunktsatz.

Fixpunkt

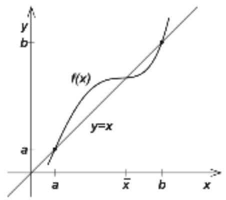
Definition: Sei $f : I \to I$ eine Funktion, die das reelle Intervall $I \subset \mathbb{R}$ in sich selbst abbildet. Jede Lösung $\bar{x}$ der Gleichung

$$x = f(x)$$

heißt Fixpunkt von f. Die Gleichung heißt Fixpunktgleichung.

Geometrisch: Der Fixpunkt ist gerade die x-Koordinate des Schnittpunktes von

1. Gerade $y = x$ und
2. Funktion $y = f(x)$.



Bemerkung: Jede Gleichung $g(x) = 0$ kann durch Einführung von

$$f(x) := g(x) + x$$

als Fixpunktgleichung $x = f(x)$ formuliert werden.

Abbildung:

- f bildet jeden Punkt $x \in I$ auf $f(x) \in I$ ab.
- Ursprung und Bildpunkt sind i.Allg. unterschiedlich.
- $\bar{x}$ wird nun aber durch $f(\bar{x}) = \bar{x}$ auf sich selbst abgebildet.
- $\bar{x}$ bleibt also unter der Abbildung von f fix (fest).

Definition: Sei $f : I \to I$ eine Funktion, die das reelle Intervall $I \subset \mathbb{R}$ in sich selbst abbildet. Jede Lösung $\bar{x}$ der Gleichung

$$x = f(x)$$

heißt Fixpunkt von f. Die Gleichung heißt Fixpunktgleichung.

Geometrisch: Der Fixpunkt ist gerade die x-Koordinate des Schnittpunktes von

1. Gerade $y = x$ und
2. Funktion $y = f(x)$.

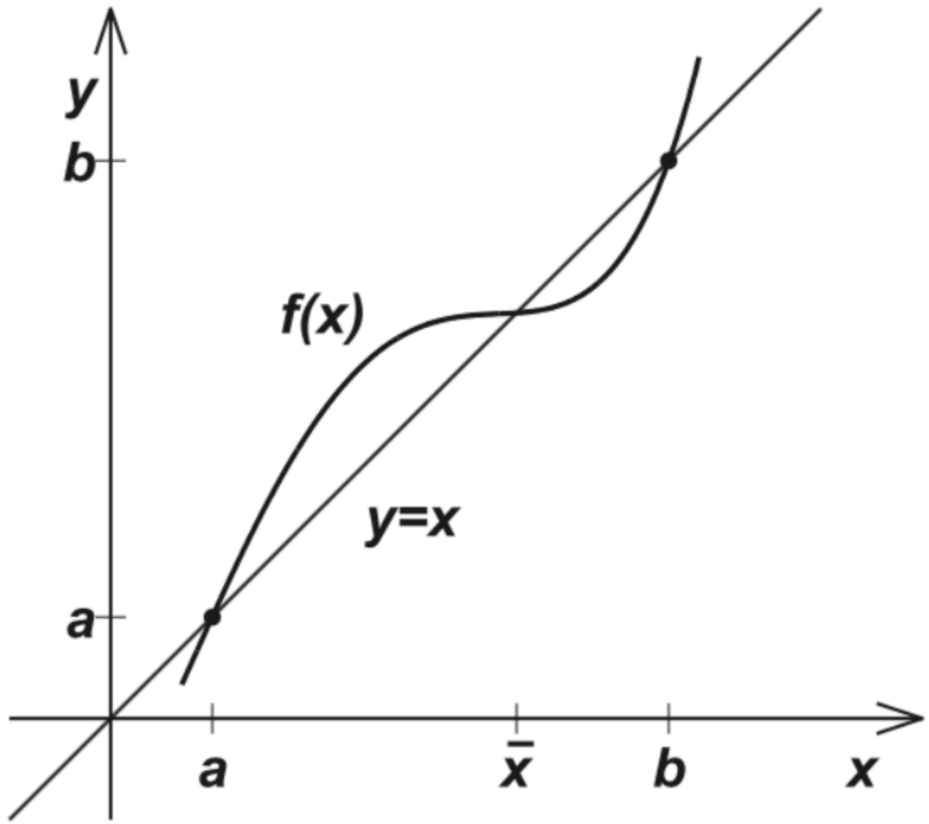


Abbildung:

- f bildet jeden Punkt $x \in I$ auf $f(x) \in I$ ab.
- Ursprung und Bildpunkt sind i.Allg. unterschiedlich.
- $\bar{x}$ wird nun aber durch $f(\bar{x}) = \bar{x}$ auf sich selbst abgebildet.
- $\bar{x}$ bleibt also unter der Abbildung von f fix (fest).

Bemerkung: Jede Gleichung $g(x) = 0$ kann durch Einführung von

$$f(x) := g(x) + x$$

als Fixpunktgleichung $x = f(x)$ formuliert werden.

Fixpunktiteration

Idee: Durch die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die definiert ist durch

$$x_0 \in I, \quad x_{n+1} = f(x_n), \; n = 0, 1, \ldots$$

ist im Falle der Konvergenz bei stetiger Funktion f ein Fixpunkt gegeben.
Die Folge heißt dann eine Fixpunkt-Folge.

Frage: Unter welchen Bedingungen konvergiert die Folge?

Satz: (Bannachscher Fixpunktsatz in $\mathbb{R}$)

Sei $f : I \to I$ eine Funktion die $I \subset \mathbb{R}$ in sich abbildet. Weiter gelte für alle $x, y \in I$

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

mit einer von x, y unabhängigen Konstanten $0 < K < 1$. Dann hat f genau einen Fixpunkt $\bar{x} \in I$ und die durch $x_{n+1} = f(x_n)$ definierte Iterationsfolge (x_n) konvergiert für jeden beliebigen Anfangspunkt $x_0 \in I$ gegen diesen Fixpunkt. 4

Corollar: Mit den Voraussetzungen des Bannachschen Fixpunktsatzes gelten folgende Fehlerabschätzungen:

- $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{K^n}{1-K}|x_1 - x_0|$ (a priori Abschätzung)
- $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{1}{1-K}|x_{n+1} - x_n|$ (a posteriori Abschätzung)

Idee: Durch die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die definiert ist durch

$$x_0 \in I, \quad x_{n+1} = f(x_n),\ n = 0, 1, \ldots$$

ist im Falle der Konvergenz bei stetiger Funktion f ein Fixpunkt gegeben. Die Folge heißt dann eine Fixpunkt-Folge.

Frage: Unter welchen Bedingungen konvergiert die Folge?

Satz: (Bannachscher Fixpunktsatz in $\mathbb{R}$)

Sei $f : I \to I$ eine Funktion die $I \subset \mathbb{R}$ in sich abbildet. Weiter gelte für alle $x, y \in I$

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

mit einer von x, y unabhängigen Konstanten $0 < K < 1$. Dann hat f genau einen Fixpunkt $\bar{x} \in I$ und die durch $x_{n+1} = f(x_n)$ definierte Iterationsfolge (x_n) konvergiert für jeden beliebigen Anfangspunkt $x_0 \in I$ gegen diesen Fixpunkt.

4

Corollar: Mit den Voraussetzungen des Bannachschen Fixpunktsatzes gelten folgende Fehlerabschätzungen:

- $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{K^n}{1-K}|x_1 - x_0|$ (a priori Abschätzung)
- $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{1}{1-K}|x_{n+1} - x_n|$ (a posteriori Abschätzung)

Extremwerte

Erinnerung: Satz von Taylor

Satz: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall I $(n+1)$-mal differenzierbar. Sei weiter $x_0 \in I$ fest.
Dann gibt es für alle $x \in I$ und zu jedem $p \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ mindestens ein ξ zwischen x und x_0, so dass

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x)$$

mit

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!\,p}(x - x_0)^p(x - \xi)^{n+1-p}.$$

Die erste Formel heißt Taylor-Formel mit dem Restglied $R_n(x)$ in der Schlömilch-Form.

Ziel jetzt: Notwendige und hinreichende Bedingungen für Extrema von Funktionen

Definition lokales Extremum

Definition: Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ besitzt im Intervall I in x_0 ein lokales Maximum (Minimum), falls es eine ε-Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ gibt, in der gilt

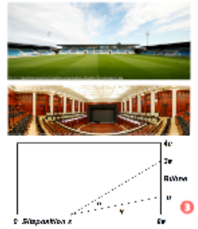
$$f(x_0) \geq (\leq) f(x) \quad \forall x \in I \cap U_\varepsilon(x_0).$$

$f(x_0)$ ist also größter (kleinster) Funktionswert in der ε-Umgebung.

- x_0 heißt Maximalstelle (Minimalstelle).
- Die Zahl $f(x_0)$ heißt lokales Maximum (Minimum).
- Ist sogar $f(x_0) > f(x)$ (bzw. $f(x_0) < f(x)$), so heißt x_0 echte lokale Maximalstelle (Minimalstelle) und $f(x_0)$ echtes lokales Maximum (Minimum).
- Statt lokal sagt man auch relativ.

Bedingungen für lokale Extrema

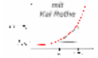
Beispiel: Optimale Sitzposition im Fußballstadion



Analysis I

Winter 2016/17

Jörn Behrens
mit
Kai Rothe



Extremalprobleme und Nullstellen

Berechnung von Nullstellen

Wichtige Aufgabenstellung: Finde $x \in D \subseteq \mathbb{R}$, so dass

$$f(x) = 0,$$

wobei $f : D \to \mathbb{R}$ i.Allg. nichtlineare reellwertige Funktion.

Problem: Häufig ist die Lösung nicht in geschlossener Form verfügbar. Näherungen können mit Hilfe einer Iterationsfolge gewonnen werden. Grundlage dafür ist der Banachsche Fixpunktsatz.

Fixpunkt

Fixpunktiteration

Fixpunkte