Analysis I (Prof. J. Behrens)

(13. / 15.12.2016)

Logarithmisches Differenzieren

Motivieren des Bsp.: $y = f(x) = x^x$

Problem: Variable x tritt sowohl in der Basis als auch im Exponenten auf.

Logarithmiere:

$$\ln(f(x)) = \ln y = \ln(x^x) = x \ln x$$

Damit:

$$(\ln y)' = (\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{y'}{y}$$

$$(x \ln x)' = \ln x + \frac{x}{x} = \ln x + 1$$

$$\Rightarrow f'(x) = y' = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$$

Bsp.: 1) $y = 3^x$

$$\ln y = x \ln 3 \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln 3$$

$$\Rightarrow y' = 3^x \ln 3$$

2) $y = (\sin x)^x$

$$\ln y = \ln(\sin x)^x = x \ln(\sin x)$$

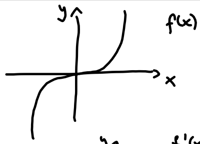
$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln(\sin x) + x \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\Rightarrow y' = (\sin x)^x \left[\ln(\sin x) + x \frac{\cos x}{\sin x}\right]$$

Dez 15-11:20

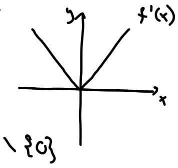
Höhere Ableitungen:

Bsp.:



$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

$D = \mathbb{R}$



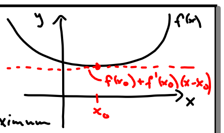
$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases} = 2|x|$$

$A = \mathbb{R}$

$$f^{(2)}(x) = \begin{cases} 2 & x > 0 \\ -2 & x < 0 \end{cases} \qquad B = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Dez 15-11:47

Absolute Extremwerte



Bew. (des Satzes)

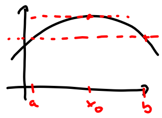
- Sei x_0 ein Punkt an dem f minimal wird (Beweis für das Maximum analog), d.h. es gilt für alle $x \in I$
$$f(x) \geq f(x_0)$$
- Nach Voraussetzung existiert
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
- Damit gilt für $x < x_0$:
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0$$
Für $x > x_0$ gilt dagegen:
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$$
- Damit folgt insgesamt:
$$f'(x_0) = 0$$

□

Bem.: • Notwendige Bed. für absoluten Extremwert.
• absoluter Extremwert bei x_0 ⇒ Tangente durch x_0 parallel zur x-Achse.

Dez 15-11:52

Satz von Rolle



Bew.: (des Satzes)

- Da f stetig auf $[a,b]$ ist, besitzt f nach dem Satz von Weierstrass auf $[a,b]$ sein Maximum M und Minimum m.
- Ist $M = m$, so folgt $f'(x) = 0$ für alle $x \in]a,b[$.
- Ist $m < M$, so wird mind. einer dieser Werte im Innern von $]a,b[$ angenommen (wegen $f(a) = f(b)$ können m und M nicht an beiden Randpunkten angenommen werden).
- Damit folgt mit dem Satz über den absoluten Extremwert die Beh.

□

Dez 15-12:03

Mittelwertsatz:

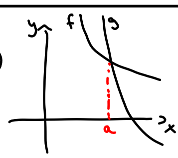
Bew.: • Wir führen die Hilfsfkt. g mit
$$g(x) := f(x) - f(a) - (x-a)\frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$
ein.

- Für g gilt dann $g(a) = g(b) = 0$.
- Damit erfüllt g die Voraussetzungen vom Satz von Rolle und es gibt ein $x_0 \in]a,b[$ mit $g'(x_0) = 0$.
- Durch Differentiation erhalten wir
$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$
und es ergibt sich mit
$$f'(x_0) = 0 + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$
die Behauptung.

□

Dez 15-12:13

Verallg. MW-Satz:



Anwendung: (Nachweis von Ungleichungen)

Wir wissen:

- f, g monoton fallend auf $\mathbb{R}$
- $f(a) = g(a)$, $a \in \mathbb{R}$
- für $x > a$: $\frac{f'(x)}{g'(x)} < 1$, $g'(x) \neq 0$

Dann:
$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} < 1 \quad \text{für ein } \xi > a$$

bzw.:
$$f(x) - f(a) > g(x) - g(a) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$$
(da $g(x) - g(a) < 0$ kehrt sich VZ bei Mult. um!)

Satz von Bernoulli - L'Hospital

- gestattet Unbestimmtheiten der Form
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$$

Dez 15-12:23

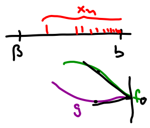
<u>Bew.:</u> (Bernoulli - L'Hospital)

- Wir beschränken uns darauf, dass x_0 rechter Randpkt. b ist und $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \lim\limits_{x\to b-0} g(x) = 0$.
- Setzen wir $f(b) = g(b) = 0$, so haben wir mit $f(x)$, $g(x)$ zwei stetig Fkt. für $x \in U(b) \cap I$ (d.h. auch in einem offenen Intervall $]\beta, b[$ mit geeigneten $\beta < b$).
- Da $g(b) = 0$ und $g'(x) \neq 0$ für $x \in]\beta, b[$, muß nach dem Satz von Rolle $g(x) \neq 0$ für alle $x \in]\beta, b[$ sein.
- $\frac{f(x)}{g(x)}$ ist also für $x \in]\beta, b[$ definiert.
- Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n \in]\beta, b[$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$.
- Nach dem verallg. MW-Satz gibt es zu jedem n ein ξ_n mit $x_n < \xi_n < b$, so dass

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{0 - f(x_n)}{0 - g(x_n)} = \frac{f(b) - f(x_n)}{g(b) - g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$$

gilt.

- Mit $x_n \to b$ gilt auch $\xi_n \to b$
- Wegen der vorausgesetzten Existenz von $\lim\limits_{x\to b-0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ folgt die Beh.



$\square$

Dez 15-12:33

<u>Bsp.:</u>

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{ax}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{a e^{ax}}{1} = \infty$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^b} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1/x}{b x^{b-1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{b x^b} = 0$
$(b > 1)$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{1} = 0$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$

<u>konvexe/konkave Fkten</u>

$f(x) = x^2$ ist eine (von unten) konvexe Fkt.
$f'(x) = 2x$ ist monoton steigend
$g(x) = -x^2$ ist konkave Fkt
$g'(x) = -2x$ ist monoton fallend

Dez 15-12:45

<u>Stetige Differenzierbarkeit</u>

Gegenbeispiel:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Dann gilt für die Ableitung mit

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos\frac{1}{x^2} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x \cos\frac{1}{x^2} = 0$$

$x \neq 0$:

$$f'(x) = 2x \cos\frac{1}{x^2} + x^2\left(-\sin\frac{1}{x^2}\right)\left(-\frac{2}{x^3}\right) = 2x\cos\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}\sin\frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}\sin\frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow \lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ existiert <u>nicht</u>!

$\rightsquigarrow$ Ableitung in $x = 0$ nicht stetig!

Dez 15-12:56