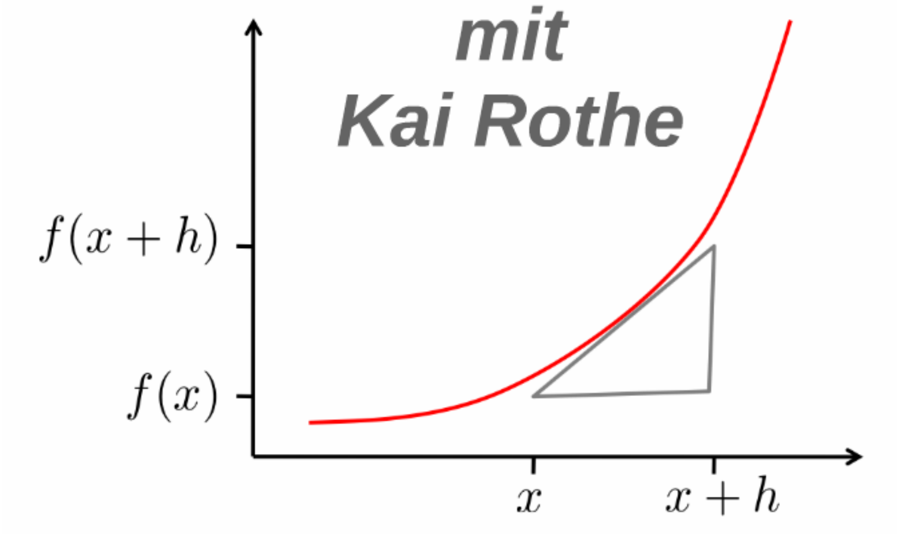
Analysis I

Winter 2016/17

Jörn Behrens
mit
Kai Rothe



Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

Buch Kapitel 2.6-2.8

I, so gilt für

Erinnerung

Differenzierbarkeit

Definition: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ Funktion, I Intervall.
f heißt differenzierbar in $x_0 \in I$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

existiert.

Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Satz: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ Funktion in x_0 differenzierbar.
Dann ist f an der Stelle x_0 auch stetig.

Differentiationsregeln

Summe, Produkt, Quotient: Seien f und g differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

- $(f+g)' = f' + g'$;
- $(c \cdot f)' = c \cdot f'$, mit $c \in \mathbb{R}$;
- $(fg)' = f'g + fg'$ (Produktregel);
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$, falls $g \neq 0$ (Quotientenregel).

Kettenregel: Seien f und g differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$(f \circ g(x))' = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Ableitungen der Grundfunktionen: Es gilt:

- $(x^{\nu})' = \nu x^{\nu - 1}$, mit $\nu \in \mathbb{R}$;
- $(\sin x)' = \cos x$, und $(\cos x)' = -\sin x$;
- $(e^x)' = e^x$ und $(a^x)' = a^x \ln a$ mit $a > 0$;
- $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$, falls $x \neq 0$;
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, falls $a > 0$, $x \neq 0$;

Differenzierbarkeit

Definition: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ Funktion, I Intervall.
f heißt differenzierbar in $x_0 \in I$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

existiert.

Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Satz: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ Funktion in x_0 differenzierbar. Dann ist f an der Stelle x_0 auch stetig.

Differentiationsregeln

Summe, Produkt, Quotient: Seien f und g differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

- $(f+g)' = f' + g'$;
- $(c \cdot f)' = c \cdot f'$, mit $c \in \mathbb{R}$;
- $(fg)' = f'g + fg'$ (Produktregel);
- $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$, falls $g \neq 0$ (Quotientenregel).

Kettenregel: Seien f und g differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

$$(f \circ g(x))' = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Ableitungen der Grundfunktionen: Es gilt:

- $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$, mit $\nu \in \mathbb{Z}$;
- $(\sin x)' = \cos x$, und $(\cos x)' = -\sin x$;
- $(e^x)' = e^x$ und $(a^x)' = a^x \ln a$ mit $a > 0$;
- $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$, falls $x \neq 0$;
- $(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a}$, falls $a > 0$, $x \neq 0$;

Logarithmisches Differenzieren

Motivierendes Beispiel

Frage: Berechne Ableitung von $y = f(x) = x^x$!
Antwort: ???

Idee: logarithmieren: $\ln f(x) = \ln y = \ln x^x = x \ln x$.
Damit:

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \ln x - 1 = (x \ln x)'$$
$$\Rightarrow \quad f'(x) = x^x(\ln x + 1)$$

Verallgemeinerung

Satz (logarithmische Ableitung): Ist $f : I \to \mathbb{R}_{>0}$ differenzierbar auf I, so gilt für die Ableitung der logarithmierten Funktion $F(x) := \ln f(x)$:

$$(F(x))' = (\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Beweis: Folgt direkt aus Differentiationsregeln.

D

Definition: Se
f heißt differer

li

existiert.

Motivierendes Beispiel

Frage: Berechne Ableitung von $y = f(x) = x^x$!
Antwort: ???

Idee: logarithmieren: $\ln f(x) = \ln y = \ln x^x = x \ln x$.
Damit:

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \ln x + 1 = (x \ln x)'$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = x^x (\ln x + 1)$$

Verallgemeinerung

Satz (logarithmische Ableitung): Ist $f : I \to \mathbb{R}_{>0}$ differenzierbar auf I, so gilt für die Ableitung der logarithmierten Funktion $F(x) := \ln f(x)$:

$$(F(x))' = (\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Beweis: Folgt direkt aus Differentiationsregeln.

Höhere Ableitungen

Zweite Ableitung

Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf $A \subseteq D$
mit der Ableitung $g(x) = f'(x)$.
Sei weiter $g : A \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf $B \subseteq A$
mit der Ableitung $(f'(x))' = g'(x)$.
Dann heißt f auf B zweimal differenzierbar und

$$f^{(2)}(x) := g'(x) = (f'(x))'$$

heißt zweite Ableitung von f.

Höhere Ableitungen

Bemerkung: Sei $f^{(n-1)} : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so definieren wir rekursiv

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$$

die n-te Ableitung von f.

Beispiel

Betrachte: $f(x) = \sin x$. Dann erhalten wir für die zweite Ableitung:

$$f'(x) = (\sin x)' = \cos x$$
$$f^{(2)}(x) = (f'(x))' = (\cos x)' = -\sin x.$$

Zweite Ableitung

Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf $A \subseteq D$ mit der Ableitung $g(x) = f'(x)$.
Sei weiter $g : A \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf $B \subseteq A$ mit der Ableitung $(f'(x))' = g'(x)$.
Dann heißt f auf B zweimal differenzierbar und

$$f^{(2)}(x) := g'(x) = (f'(x))'$$

heißt zweite Ableitung von f.

Höhere Ableitungen

Bemerkung: Sei $f^{(n-1)} : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so definieren wir rekursiv

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$$

die n-te Ableitung von f.

Beispiel

Betrachte: $f(x) = \sin x$. Dann erhalten wir für die zweite Ableitung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sin x)' = \cos x \\ f^{(2)}(x) &= (f'(x))' = (\cos x)' = -\sin x. \end{aligned}$$

Absolute Extremwerte

Satz: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ auf I definiert und nehme am inneren Punkt $x_0 \in I$ einen absoluten Extremwert (Maximum oder Minimum) an.

Falls $f'(x_0)$ existiert, so gilt

$$f'(x_0) = 0.$$

1

Satz von Rolle

Satz (Rolle): Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar.

Falls $f(a) = f(b)$ existiert mindestens ein $x_0 \in]a, b[$ mit

$$f'(x_0) = 0.$$

ɔar.

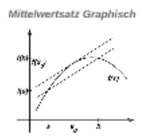
Mittelwertsatz

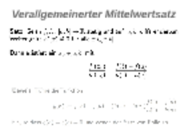
Satz: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a,b[$ differenzierbar.

Dann existiert mindestens ein $x_0 \in]a,b[$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

3



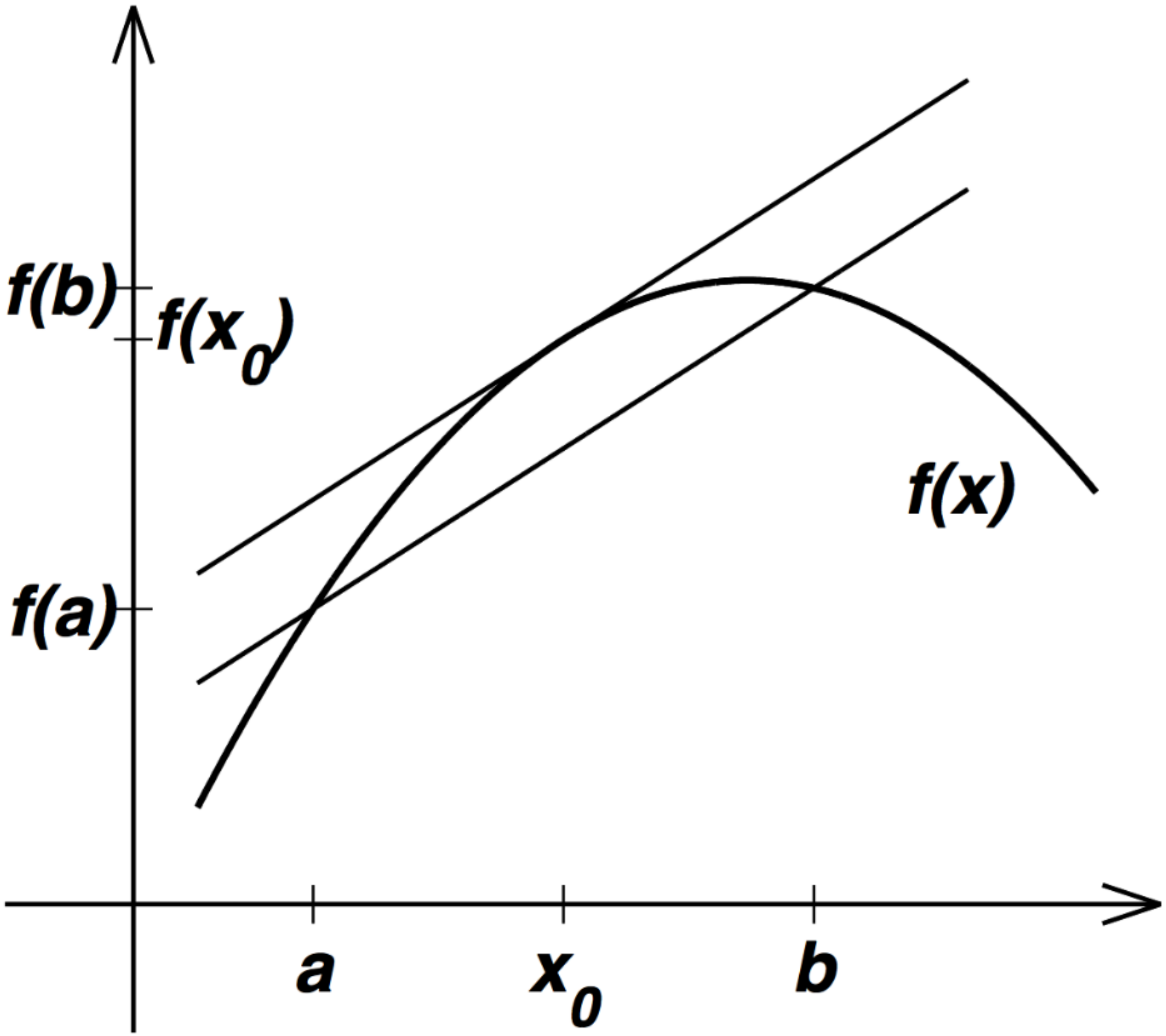


Re
Berno

Satz (Bernoulli-L'Hospita

Seien $I =]a,b[$ offenes Int

Mittelwertsatz Graphisch



Folgerung: Monotonie

Korollar: Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ für jedes $x \in]a, b[$ differenzierbar mit $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ überall.

Dann ist $f(x)$ auf ganz $]a, b[$ monoton steigend (fallend).

Verallgemeinerter Mittelwertsatz

Satz: Seien $f, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar. Weiter gelte $h'(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$.

Dann existiert ein $x_0 \in]a, b[$ mit

$$\frac{f'(x_0)}{h'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{h(b) - h(a)}.$$

Beweis: Führe die Funktion

$$g(x) := f(x) - f(a) - (h(x) - h(a)) \frac{f(b) - f(a)}{h(b) - h(a)}$$

ein, so dass $g(a) = g(b) = 0$ und wende den Satz von Rolle an.

Regeln von Bernoulli-L'Hospital

Satz (Bernoulli-L'Hospital)
Seien $I =]a, b[$ offenes Intervall, $x_0 \in [a, b]$ mit $U(x_0)$ Umgebung von x_0.
$f, g : I \to \mathbb{R}$ seien zwei Funktionen, differenzierbar für alle $x_0 \in U(x_0) \cap I$ (möglicherweise mit Ausnahme von x_0 selbst). Sei weiter

$$\lim_{x \to x_0, x \in I} f(x) = \lim_{x \to x_0, x \in I} g(x) = \{0, \infty, -\infty\}.$$

Es gelte $g'(x) \neq 0$ für $x \in U(x_0) \cap I$, $x \neq x_0$.

Wenn

$$\lim_{x \to x_0, x \in I} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

gilt (d.h. der Grenzwert im eigentlichen oder uneigentlichen Sinn existiert), dann gilt auch

$$\lim_{x \to x_0, x \in I} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0, x \in I} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

4

Satz (Bernoulli-L'Hospital)
Seien $I =]a, b[$ offenes Intervall, $x_0 \in [a, b]$ mit $U(x_0)$ Umgebung von x_0. $f, g : I \to \mathbb{R}$ seien zwei Funktionen, differenzierbar für alle $x_0 \in U(x_0) \cap I$ (möglicherweise mit Ausnahme von x_0 selbst). Sei weiter

$$\lim_{x \to x_0, x \in I} f(x) = \lim_{x \to x_0, x \in I} g(x) = \{0, \infty, -\infty\}.$$

Es gelte $g'(x) \neq 0$ für $x \in U(x_0) \cap I$, $x \neq x_0$.

Wenn

$$\lim_{x \to x_0, x \in I} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

gilt (d.h. der Grenzwert im eigentlichen oder uneigentlichen Sinn existiert), dann gilt auch

$$\lim_{x \to x_0, x \in I} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0, x \in I} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

4

Bemerkung Der Satz gilt analog auch für einseitige Grenzewerte: Sind f, g für $x \in [A, \infty[$ (bzw. $x \in]-\infty, B]$) definierte, differenzierbare Funktionen, ist $g'(x) \neq 0$ für diese x und gilt

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \{0, \infty, -\infty\}.$$

Wenn nun wieder

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

gilt, dann gilt auch

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Konvexe/Konkave Funktionen

Satz: Die Ableitung einer von unten konvexen (konkaven) differenzierteren Funktion ist monoton steigend (fallend).

Ohne Beweis

Stetig Differenzierbar

Definition:
Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt stetig differenzierbar auf $I \subset D$, falls sie differenzierbar ist und die Ableitung $f'(x)$ eine stetige Funktion auf I ist.

5

ıkeit

bar.

Satz von Rolle

Satz (Rolle): Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a,b[$ differenzierbar.

Falls $f(a) = f(b)$ existiert mindestens ein $x_0 \in]a,b[$ mit

$$f'(x_0) = 0.$$

2

Mittelwertsatz

Satz: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a,b[$ differenzierbar.

Dann existiert mindestens ein $x_0 \in]a,b[$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

3

Absolute Extremwerte

Satz: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ auf I definiert und nehme am inneren Punkt $x_0 \in I$ einen absoluten Extremwert (Maximum oder Minimum) an.

Falls $f'(x_0)$ existiert, so gilt

$$f'(x_0) = 0.$$

1

Regeln von Bernoulli-L'Hospital

4

Höhere Ableitungen

Zweite Ableitung

Höhere Ableitungen

Beispiel

Analysis I

Konvexe/Konkave Funktionen

Satz: Die Ableitung einer von unten konvexen (konkaven) differenzierbaren Funktion ist monoton steigend (fallend).

Logarithmisches Differenzieren

Motivierendes Beispiel

Verallgemeinerung

Erinnerung

Differenzierbarkeit

Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Differentiationsregeln

Stetig Differenzierbar

Definition:
Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt stetig differenzierbar auf $I \subset D$, falls sie differenzierbar ist und die Ableitung $f'(x)$ eine stetige Funktion auf I ist.

5