Analysis I

J. Behrens

29.11.2016

1 Beweis des Satzes über Nullfolgen:

1. (a_n) Nullfolge $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n| < \varepsilon$
$\forall n \geq n_0$.

mit $|b_n| \leq |a_n| \Rightarrow$ auch $|b_n| < \varepsilon \;\; \forall n \geq n_0$
$\Rightarrow (b_n)$ Nullfolge $\boxtimes$

2. (Beispiel ±)
$(a_n), (b_n)$ Nullfolgen $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$
$n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$

Wähle $n_0 = \max\{x_1, x_2\} \Rightarrow |a_n \pm b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$

$\Rightarrow (a_n + b_n)$ und $(a_n - b_n)$ sind Nullfolgen. ☒

Idee für weiteres Vorgehen:

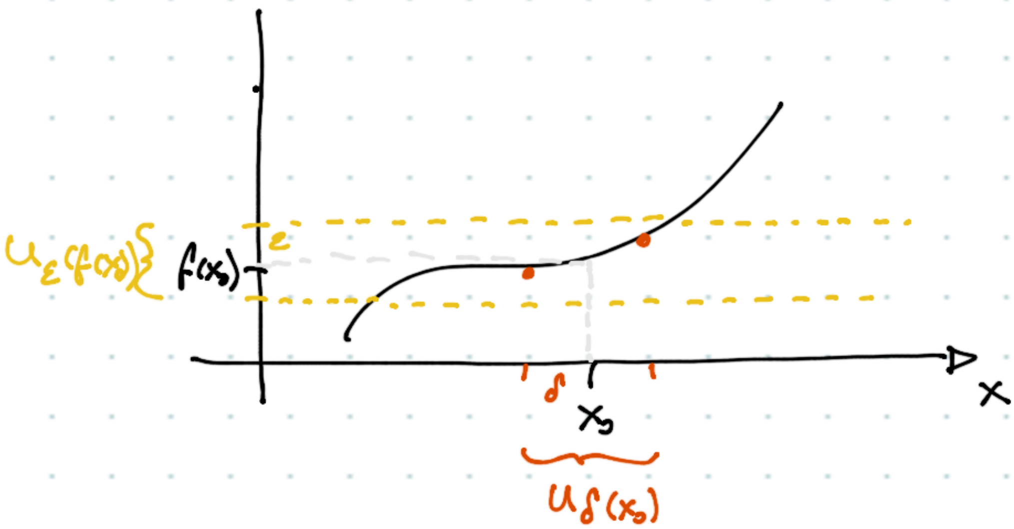
Falls (a_n) Nullfolge $\Rightarrow (a_n + a_n), (a_n + a_n + a_n), \ldots (m \cdot a_n)$ sind auch Nullfolgen

...

② Stetigkeit:

<u>Bemerkung</u>: Die Aussage des Satzes lässt sich kurz formulieren:

$$x \in U_\delta(x_0) \cap D \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$$

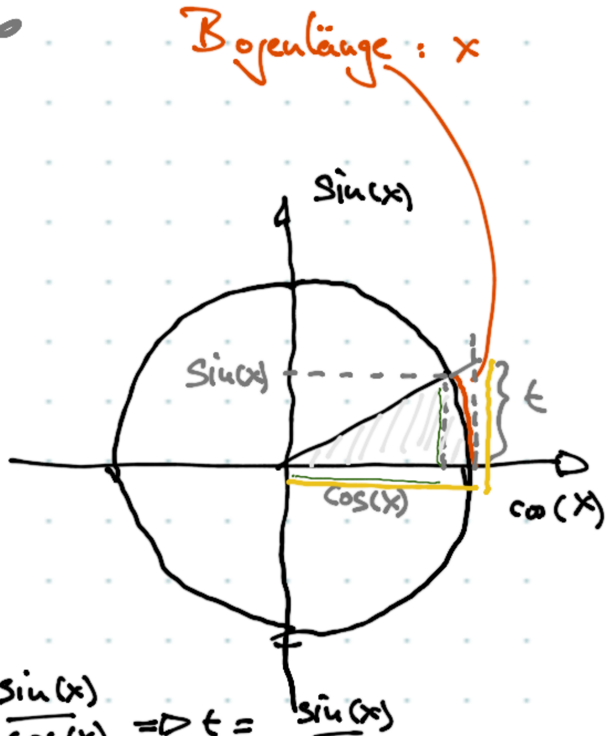


Analysis I

01. 12. 2016

Nachtrag zum 24. 11. 2016

Nachweis $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$



Betrachte Einheitskreis

$F_1 = \frac{\sin(x) \cdot \cos(x)}{2}$

$F_3 = \frac{t \cdot 1}{2} \overset{\text{Strahlensatz}}{=} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \frac{1}{2}$ $\qquad \frac{t}{1} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \Rightarrow t = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$F_2 = \frac{x}{2\pi} \cdot \pi r^2 = \frac{x}{2}$

Es gilt: $F_1 \leq F_2 \leq F_3$

d.h. $\left|\frac{\cos(x) \cdot \sin(x)}{2}\right| \leq \left|\frac{x}{2}\right| \leq \left|\frac{\sin(x)}{2\cos(x)}\right| \quad \Big| \cdot \frac{2}{\sin(x)}$ $(x \to 0)$

$\Rightarrow \quad |\cos(x)| \leq \left|\frac{x}{\sin(x)}\right| \leq \left|\frac{1}{\cos(x)}\right|$

nun ist aber $\lim\limits_{x \to 0} |\cos(x)| = 1$

$$\lim_{x \to 0} \left| \frac{1}{\cos(x)} \right| = 1$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to 0} \left| \frac{x}{\sin(x)} \right| = 1 .$$

Nahe $x = 0$ gilt weiter: $\operatorname{sign}(x) = \operatorname{sign}(\sin(x))$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\frac{x}{\sin(x)}} = \frac{\sin(x)}{x} > 0 \quad \text{(in der Nähe der Null)}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

(1) Nachweis zum Satz über Nullfolgen:

1. (a_n) Nullfolge $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n| < \varepsilon \; \forall n \geq n_0$

   mit $|b_n| \leq |a_n| \Rightarrow$ auch $|b_n| < \varepsilon \; \forall n \geq n_0$

   $\Rightarrow (b_n)$ Nullfolge. $\boxtimes$

2. (Beispiel): (a_n) (b_n) Nullfolgen

   $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_1 \in \mathbb{N} : |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $n_2 \in \mathbb{N} : |b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$

Wähle $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

$\Rightarrow \quad |a_n \pm b_n| \le |a_n| + |b_n| < \varepsilon \quad \forall n \ge n_0$

$\Rightarrow \quad (a_n + b_n), (a_n - b_n)$ sind Nullfolgen.

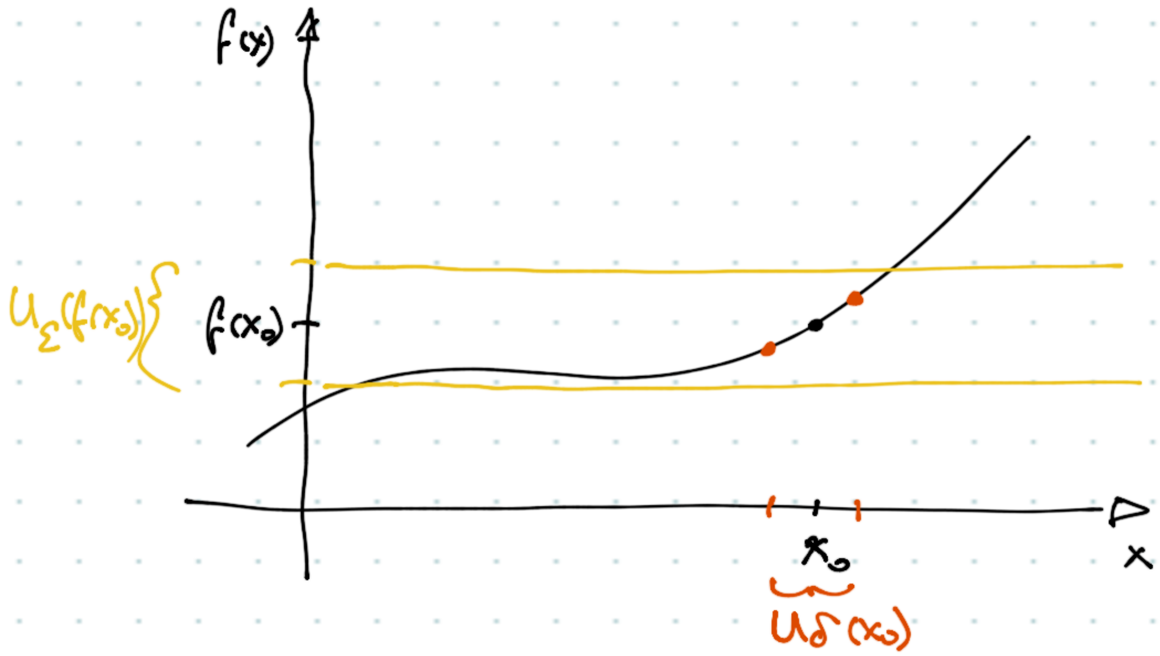
<u>Idee für weitere Rechenregeln</u> : Falls (a_n) Nullfolge

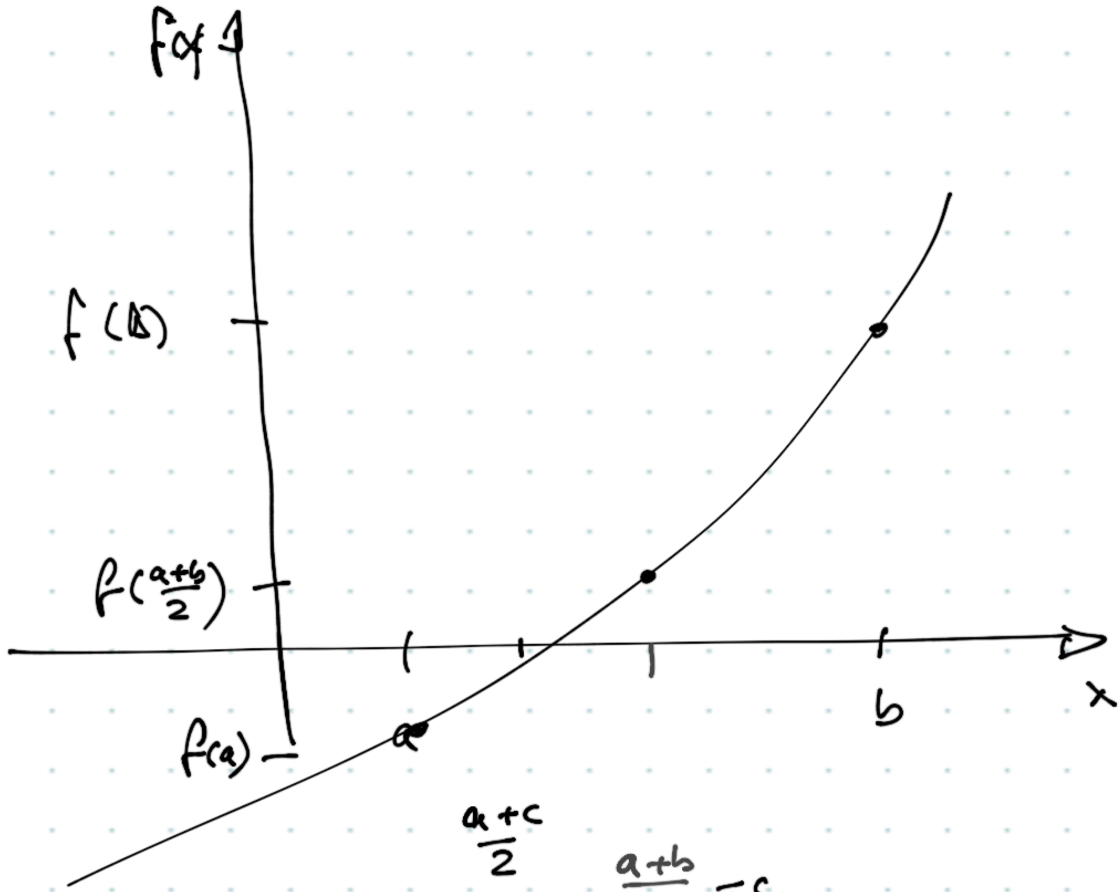
$\Rightarrow \quad (a_n + a_n)$ Nullfolge

$(a_n + a_n + a_n) \ldots \quad (m \cdot a_n) \quad m \in \mathbb{N}$ Nullfolgen.

② Stetigkeit :

Kurzform des Satzes: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : x \in U_\delta(x_0) \cap D \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$





$$\frac{a+b}{2} = c$$