Analysis I

Jörn Behrens

15. 11. 2016

(1)

a) • $y = |x|$ mit $D = \mathbb{R}$ ist durch $b_u = 0$ nach unten beschränkt

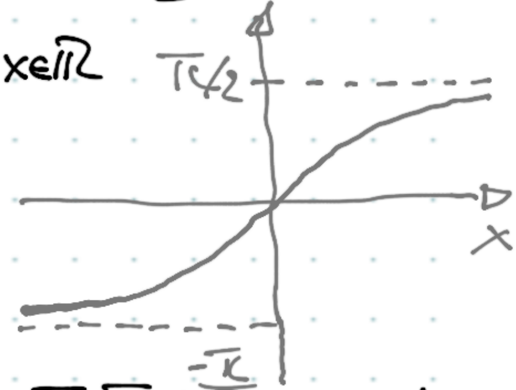
• in $M = [a, b]$ ist sie auch nach oben beschränkt, mindestens durch $b_o = |a| + |b|$ (eigentlich ist $y = |x|$ "schärfer" durch $\tilde{b}_o = \max\{|a|, |b|\}$ beschränkt)

b) Die Parabel $y = -x^2 + 1$ ist durch $b_o = 3$ beschränkt

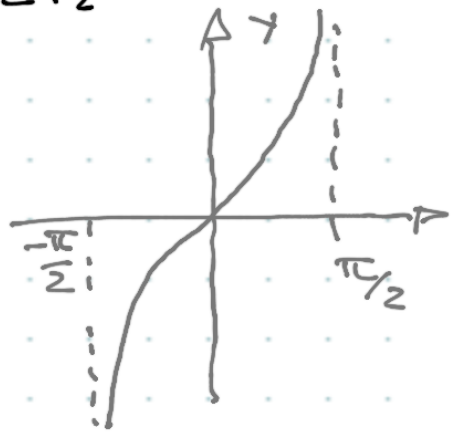
Es gibt auch kleinere b_o (zB $= 1$).

c) $y = \arctan x$ ist durch $c < \frac{\pi}{2}$ beschränkt

Es gilt $|\arctan x| < \frac{\pi}{2} \;\forall x \in \mathbb{R}$



d) $y = \tan x$ ist auf $D = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ unbeschränkt



Aber: auf dem Intervall

$$M = \left[-\frac{\pi}{2} + \varepsilon, \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right] \text{ mit } 0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$$

ist $y = \tan x$ beschränkt, egal wie klein ε gewählt wird.

② Monotonie:

a) $y = \arctan x$ ist streng monoton steigend

b) $y = x^3$ oder $y = e^x$ sind streng monoton steigend

c) $y = \frac{1}{x}$ mit $D =]0, \infty[$ streng monoton fallend

d) $y = c$ (c Konstante in $\mathbb{R}$) ist monoton steigend UND fallend.

③ $f(x) = x^2$ auf $I = \mathbb{R}$.

Behauptung: f ist streng konvex von unten

Zu zeigen: $(\alpha x + (1-\alpha)y)^2 < \alpha x^2 + (1-\alpha)y^2$

$$
\begin{aligned}
(\alpha x + (1-\alpha)y)^2 &= \alpha^2 x^2 + 2\alpha(1-\alpha)xy + (1-\alpha)^2 y^2 \\
&= \alpha^2 x^2 + 2\alpha xy - 2\alpha^2 xy + y^2 - 2\alpha y^2 + \alpha^2 y^2 \\
&= \alpha x^2 - \alpha x^2 + \alpha^2 x^2 + 2\alpha xy - 2\alpha^2 xy - \alpha y^2 + \alpha^2 y^2 + y^2 - \alpha y^2 \\
&= \alpha x^2 - (\alpha - \alpha^2)(x^2 - 2xy + y^2) + (1-\alpha) y^2 \\
&= \alpha x^2 - \alpha(1-\alpha)(x-y)^2 + (1-\alpha)y^2 \\
&< \alpha x^2 + (1-\alpha)y^2 \qquad \square
\end{aligned}
$$

⑤ Eigenschaft des Logarithmus, Beispiel:

Zeige $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

Es gilt:
$$
\begin{aligned}
a^{\log_a(xy)} &= x \cdot y \\
&= a^{\log_a(x)} \cdot a^{\log_a(y)} \\
&= a^{\log_a(x) + \log_a(y)}
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

(4) Behauptung: $f(x) = u(x) + g(x)$

u ungerade Fkt. und g gerade Fkt.

Wähle: $g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$

$$u(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Es gilt: $u(x) + g(x) = \frac{f(x) - \cancel{f(-x)}}{2} + \frac{f(x) + \cancel{f(-x)}}{2}$

$$= f(x)$$

Außerdem: $u(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \frac{-f(-x) + f(x)}{2} = -u(-x)$

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(-x)$$

Analysis I

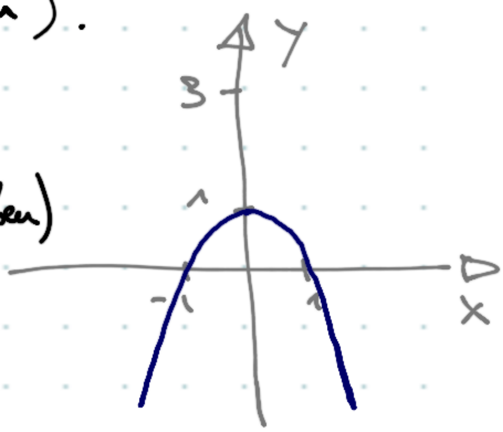
17. 11. 2016

① Beispiele für beschränkte Funktionen:

a) • $y = |x|$ mit $D = \mathbb{R}$ ist durch $b_u = 0$ nach unten beschränkt

• In $M = [a, b]$ ist sie auch nach oben beschränkt, mindestens durch $b_o = |a| + |b|$ (eigentlich ist eine "schärfere" obere Schranke durch $b_o = \max\{|a|, |b|\}$ gegeben).

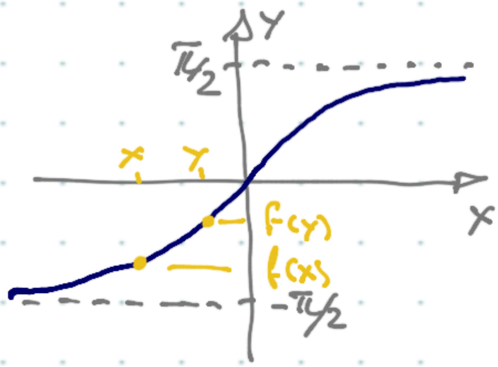
b) Die Parabel $y = -x^2 + 1$ ist beschränkt durch $b_o = 3$ (nach oben)



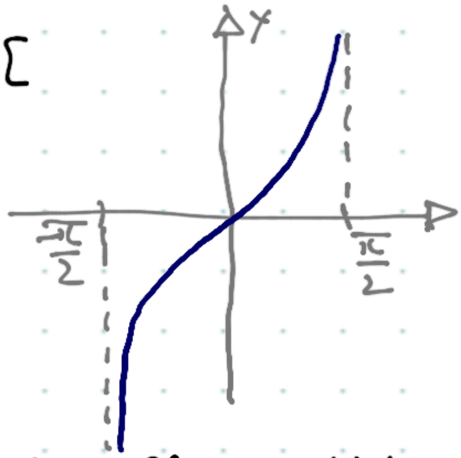
Bem: Es gibt auch kleinere b_o (z.B. $b_o = 1$)

c) $y = \arctan x$ ist durch $c = \frac{\pi}{2}$ beschränkt. Es gilt

$$|\arctan x| \leq \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



d) $y = \tan x$ ist auf $D =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ unbeschränkt.



Auf $M = [-\frac{\pi}{2} + \varepsilon, \frac{\pi}{2} - \varepsilon]$ mit $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$

ist die Funktion aber beschränkt (egal wie klein ε ist)!

2 Monotone Funktionen:

a) $y = \arctan x$ ist streng monoton steigend.

b) $y = x^3$ oder $y = e^x$ sind streng monoton steigend

c) $y = \frac{1}{x}$ mit $D =]0, \infty[$ streng monoton fallend.

d) $y = c$ (konstante Fkt.) ist monoton fallend UND steigend.

③ Konvexe Funktion:

<u>Betrachte</u> $f(x) = x^2$ auf $I = \mathbb{R}$

<u>Behauptung</u>: f ist streng konvex von unten

Sei $x \neq y \in \mathbb{R}$, $\alpha \in]0,1[$

$$(\alpha x + (1-\alpha)y)^2 = \alpha^2 x^2 + 2\alpha(1-\alpha)xy + (1-\alpha)^2 y^2$$

$$= \alpha^2 x^2 + 2\alpha xy - 2\alpha^2 xy + y^2 - \underline{2\alpha y^2} + \alpha^2 y^2$$

$$= \alpha x^2 \underbrace{- \alpha x^2 + \alpha^2 x^2 + 2\alpha xy - 2\alpha^2 xy - \alpha y^2 + \alpha^2 y^2}_{-(\alpha-\alpha^2)(x^2-2xy+y^2)} \underbrace{+ y^2 - \alpha y^2}_{(1-\alpha)y^2}$$

$$= \alpha x^2 - (\alpha - \alpha^2)(x^2 - 2xy + y^2) \qquad (1-\alpha)y^2$$

$$= \alpha x^2 - \alpha(1-\alpha)(x-y)^2 + (1-\alpha)y^2$$

$$< \alpha x^2 + (1-\alpha)y^2 \qquad \square$$

④ $f(x) = u(x) + g(x)$ u ungerade, g gerade

<u>Wähle</u>: $u(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ und $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$

<u>Es gilt</u>: $u(x) + g(x) = \dfrac{f(x) - \cancel{f(-x)}}{2} + \dfrac{f(x) + \cancel{f(-x)}}{2} = \dfrac{2f(x)}{2} = f(x)$

<u>Außerdem</u>: $u(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} = \dfrac{-f(-x) + f(x)}{2} = -u(-x)$

$g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} = \dfrac{f(-x) + f(x)}{2} = g(-x)$

⑤ Eigenschaft des Logarithmus:

Zeige: $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

Es gilt: $a^{\log_a(x\cdot y)} = x \cdot y = a^{\log_a(x)} \cdot a^{\log_a(y)}$

$= a^{\log_a(x) + \log_a(y)}$

$\Rightarrow \log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$