Analysis I

08.11.2016

J. Behrens

① Modell Microorganismen-Wachstum

Sei $w(t)$ = Masse Microorganismen (MO)

<u>Beobachtung</u>: Zunahme MO-Masse in einem Zeitintervall $[t, t+\Delta t]$ ist proportional zur Masse zur Zeit t

<u>Mathematisch</u>: $\underbrace{w(t+\Delta t) - w(t)}_{\text{Zunahme}} \sim \Delta t \, w(t)$

proportional

<u>führt zu</u> $$\frac{w(t+\Delta t) - w(t)}{\Delta t} = \alpha \cdot w(t)$$

$$w'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{w(t+\Delta t) - w(t)}{\Delta t} = \alpha\, w(t)$$

Fazit: w erfüllt die Differential) gleichung

$$\boxed{w'(t) = \alpha\, w(t)} \quad (*)$$

Anfangsbedingung: Zur Zeit t_0
(Anfang meiner Beobachtung)
sei $\boxed{w(t_0) = c_0}$ $(**)$

Lösung: Mit $(*)$ und $(**)$ ist w eindeutig bestimmt, die Lösung lautet

$$w(t) = c_0 \cdot e^{\alpha(t-t_0)}$$

② Sei $f(x) = x^2$, $D = \mathbb{R}$

f injektiv? $\rightarrow$ Nein, denn $x = -1 \neq 1 = x'$
aber $f(x) = f(-1) = 1 = f(1) = f(x')$

f surjektiv? $\rightarrow$ Ja, denn zu $y \geq 0 \ \exists x \in \mathbb{R} : y = x^2$
nämlich $x = \pm\sqrt{y}$

f bijektiv? $\rightarrow$ Nein da nicht injektiv

$f(x) = x^2$, $D = \mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

f injektiv? ja
f surjektiv? ja $\Rightarrow$ f bijektiv!

③ $y = f(x) = x^2 \quad , \quad D = \mathbb{R}_0^+$

1) Nach x auflösen: $y = x^2$

$\Rightarrow \pm\sqrt{y} = x$ da $x \in \mathbb{R}_0^+$ fällt "$-$" weg

$\Rightarrow f^{-1}(y) = \sqrt{y} = x$

2) vertausche x und y

$y = f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

D.h. Umkehrfunktion zu $f(x) = x^2$ auf $D = \mathbb{R}_0^+$ ist $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

(4) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$

$\bar{h}(x) = f \circ g = |x|$

$\hat{h}(x) = g \circ f = \sqrt{x^2} = |x|$

$\bar{h}(x) = (\sqrt{x})^2$ falls $x \in \mathbb{R}_0^+$

Beobachtung: bei geeignet gewähltem D ist $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}$

Beispiel für $f: A \to B$, $g: C \to D$ mit $B \subsetneq C$:

$f(x) = \cos(x)$, $g(x) = x^2$

$g \circ f = (\cos(x))^2$

$g(f(x))$

Analysis I

10. 11. 2016

① Modell für Wachstum von Microorganismen

<u>Beobachtung</u>: Zunahme von Microorganismen (MO) im Zeitintervall $[t, t+\Delta t]$ proportional zur Masse zur Zeit t

Sei $\omega(t)$ = Masse MO zur Zeit t

<u>Mathematisch</u>: $\omega(t+\Delta t) - \omega(t) \sim \Delta t \cdot \omega(t)$

proportional

oder $$\frac{\omega(t+\Delta t) - \omega(t)}{\Delta t} = \alpha \cdot \omega(t)$$

führt zu

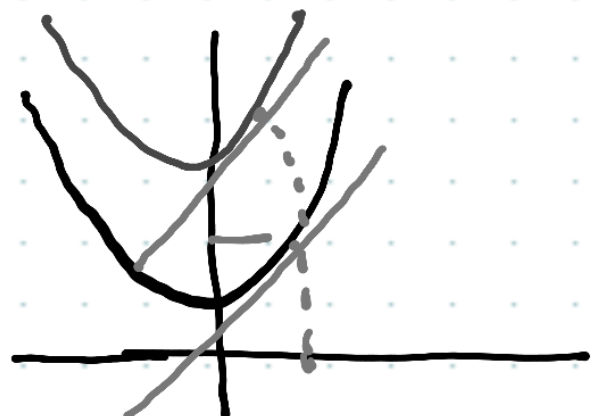
$$\longrightarrow w'(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{w(t+\Delta t) - w(t)}{\Delta t} = \alpha \cdot w(t)$$

<u>Fazit:</u> w erfüllt die (Differential-)Gleichung

$$\boxed{w'(t) = \alpha \cdot w(t)} \quad *$$

<u>Anfangsbedingung:</u>

Sei $\boxed{w(t_0) = c_0}$ **



<u>Lösung:</u> Mit (*) und (**) ist w eindeutig bestimmt, die Lösung lautet

$$\boxed{w(t) = c_0 \cdot e^{\alpha(t-t_0)}}$$

② Sei $f(x) = x^2 = y$, $D = \mathbb{R}$

injektiv? $\longrightarrow$ Nein, denn $x = -1 \neq 1 = x'$

$$f(x) = f(-1) = 1 = f(1) = f(x')$$

surjektiv? $\longrightarrow$ Ja, denn zu $y \geq 0 \; \exists x \in \mathbb{R} : y = x^2$

$$x = \pm \sqrt{y}$$

bijektiv? $\longrightarrow$ Nein, weil nicht injektiv

Sei $f(x) = x^2$, $D = \mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

injektiv: ja,

③ Beispiel Umkehrfunktion:

$$y = f(x) = x^2 \ , \quad \mathbb{R}_0^+$$

1) Nach x auflösen: $y = x^2$

$$\Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{y} \quad \text{wegen } D = \mathbb{R}_0^+$$

$$\Rightarrow \quad x = +\sqrt{y}$$

$$\Rightarrow \quad x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

2) Vertauschen der Variablen:

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

Umkehrfunktion zu $f(x) = x^2$ auf $D = \mathbb{R}_0^+$

④ $f(x)=x^2$, $g(x)=\sqrt{x}$ $\quad \hat{h}(x)=f\circ g(x)$

nur möglich für $x \in D = \mathbb{R}_0^+$

$\bar{h}(x) = g \circ f(x)$

$\hat{h}(x) = x$ aber eben nur auf $\mathbb{R}_0^+$

$\bar{h}(x) = |x|$ für $x \in \mathbb{R}$