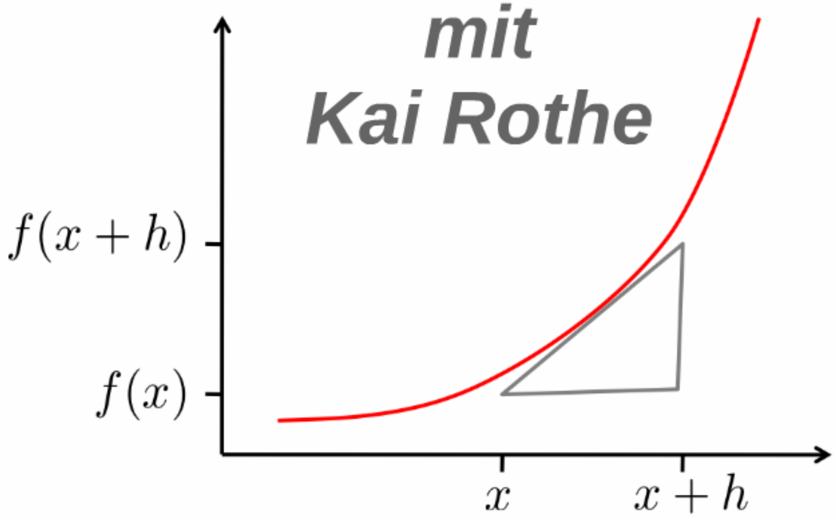
Analysis I

Winter 2016/17

Jörn Behrens
mit
Kai Rothe

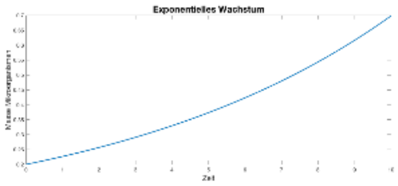


Funktionen

Buch Kapitel 2

Motivation und Definition

Beispiel



Exponentielles Wachstum einer Kultur von Mikroorganismen (Beispiel):

$$w : [t_0, T] \to \mathbb{R}; \quad w(t) = c_0 \cdot e^{\alpha t},$$

mit Parametern c_0 und α.

w Abbildung! ①

Definition
Reelle Funktion einer Veränderlichen

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}$.

$$f : D \to \mathbb{R}$$

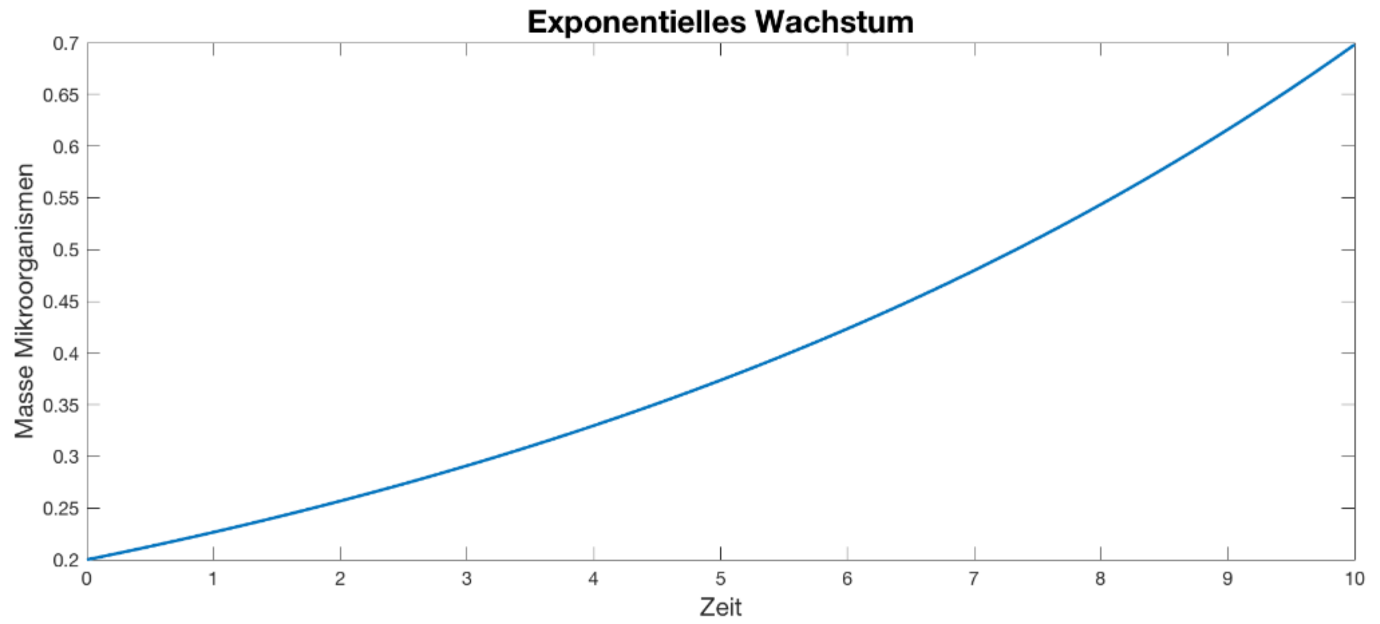
heißt *reellwertige Funktion* einer Veränderlichen. Schreibe

$$y = f(x)$$

mit $x \in D$ der unabhängigen Veränderlichen und y (dem Bild von x unter f) der abhängigen Veränderlichen.

- $D = D(f) \subset \mathbb{R}$ heißt *Definitionsbereich* der Funktion f.
- $W = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in D \text{ mit } y = f(x)\}$ heißt *Wertebereich* von f.

Beispiel



Exponentielles Wachstum einer Kultur von Mikroorganismen (Beispiel):

$$w : [t_0, T] \to \mathbb{R}; \quad w(t) = c_0 \cdot e^{at},$$

mit Parametern c_0 und a.

w Abbildung! ①

Definition
Reelle Funktion einer Veränderlichen

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}$.

$$f : D \to \mathbb{R}$$

heißt *reellwertige Funktion* einer Veränderlichen. Schreibe

$$y = f(x)$$

mit $x \in D$ der unabhängigen Veränderlichen und y (dem Bild von x unter f) der abhängigen Veränderlichen.

- $D = D(f) \subset \mathbb{R}$ heißt *Definitionsbereich* der Funktion f.
- $W = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in D \text{ mit } y = f(x)\}$ heißt *Wertebereich* von f.

Weitere Begriffe

Erinnerung: Bildmenge/Urbildmenge

Annahmen:

- $D \subseteq \mathbb{R}$.
- $f : D \subseteq \mathbb{R} \to W \subseteq \mathbb{R}$.
- Also: f ordnet jedem $x \in D$ *genau ein* $y \in W$ zu, oder

$$f(a) \neq f(a') \Rightarrow a \neq a' \quad (a, a' \in D).$$

- Für $A \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$ ist die *Bildmenge* von A

$$f(A) := \{y \in W : \exists x \in A \text{ mit } y = f(x)\}.$$

- Für $B \subseteq W \subseteq \mathbb{R}$ ist die *Urbildmenge* von B

$$f^{-1}(B) := \{x \in D : f(x) \in B\}$$

Erinnerung: Injektiv/Surjektiv/Bijektiv

Sei $f : A \to B$ eine Funktion.

- f heißt *injektiv*, falls für $a, a' \in A$ beliebig gilt

$$a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a').$$

- f heißt *surjektiv*, falls es zu jedem $b \in B$ ein $a \in A$ gibt, so dass

$$b = f(a).$$

- f heißt *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist.

Gleichheit von Funktionen

Seien $f : D(f) \to \mathbb{R}$ und $g : D(g) \to \mathbb{R}$ Funktionen.
Dann sind f und g gleich ($f = g$) genau dann, wenn

- $D(f) = D(g)$ und
- für alle $x \in D(f)$ gilt: $f(x) = g(x)$.

Darstellung von Funktionen

Funktionen können durch *Tabellen* ihrer Funktionswerte dargestellt werden:

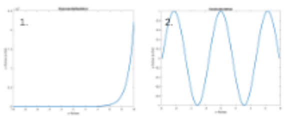
x	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_n

$$f : \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\} \to \{y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n\}$$

Funktionen können durch ihren *Graphen* dargestellt werden,
d.h. das kartesische *Produkt* $D \times f(D)$.
Genauer:

$$\mathrm{Graph}(f) = \{(x, y) \in D \times f(D) : y = f(x)\} \subset D \times f(D).$$

Zwei Beispiele



1. $y = f(x) = e^x$, $D = \mathbb{R}$, $W = (0, \infty)$, injektiv, surjektiv, also bijektiv
2. $y = f(x) = \sin x$, $D = \mathbb{R}$, $W = [-1, 1]$: nicht injektiv, surjektiv

Erinnerung: Bildmenge/Urbildmenge

Annahmen:

- $D \subseteq \mathbb{R}$.
- $f : D \subset \mathbb{R} \to W \subset \mathbb{R}$.
- Also: f ordnet jedem $x \in D$ *genau ein* $y \in W$ zu, oder

$$f(a) \neq f(a') \Rightarrow a \neq a' \quad (a, a' \in D).$$

- Für $A \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$ ist die *Bildmenge* von A

$$f(A) := \{y \in W : \exists x \in A \text{ mit } y = f(x)\}.$$

- Für $B \subseteq W \subseteq \mathbb{R}$ ist die *Urbildmenge* von B

$$f^{-1}(B) := \{x \in D : f(x) \in B\}$$

Erinnerung: Injektiv/Surjektiv/Bijektiv

Sei $f : A \to B$ eine Funktion

- f heißt *injektiv*, falls für $a, a' \in A$ beliebig gilt.

$$a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a').$$

- f heißt *surjektiv*, falls es zu jedem $b \in B$ ein $a \in A$ gibt, so dass

$$b = f(a).$$

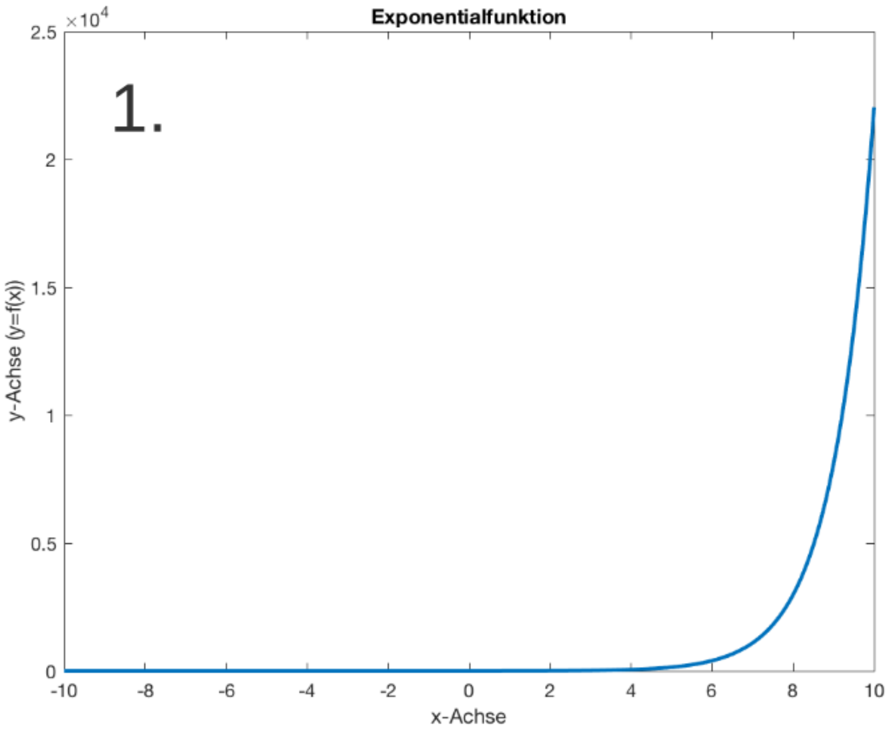
- f heißt *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist.

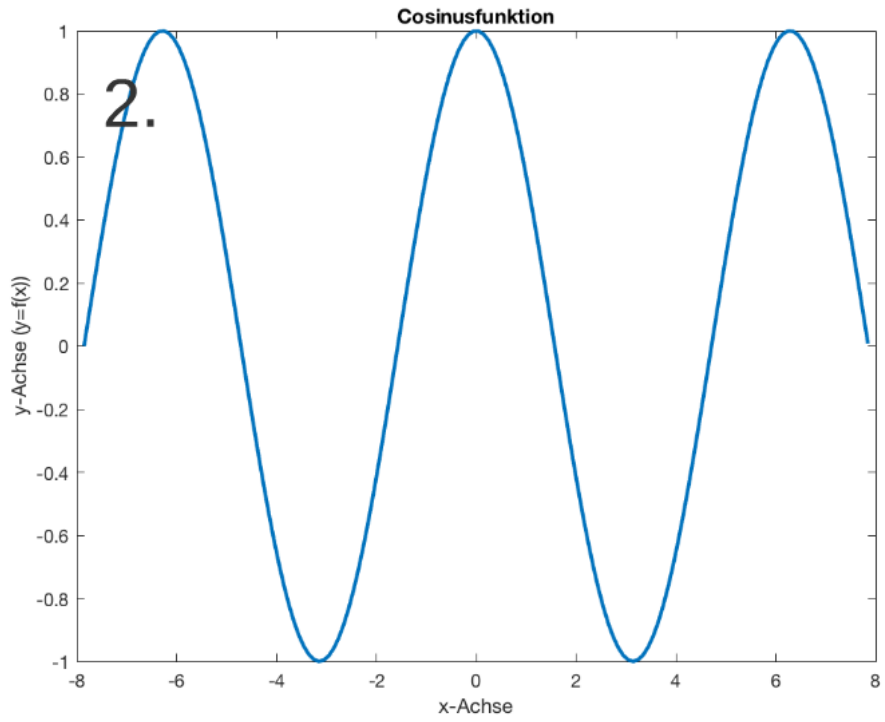
Gleichheit von Funktionen

Seien $f : D(f) \to \mathbb{R}$ und $g : D(g) \to \mathbb{R}$ Funktionen.
Dann sind f und g gleich ($f = g$) genau dann, wenn

- $D(f) = D(g)$ und
- für alle $x \in D(f)$ gilt: $f(x) = g(x)$.

Zwei Beispiele





1. $y = F(x) = e^x$, $D = \mathbb{R}$, $W =]0, \infty[$, injektiv, surjektiv, also bijektiv
2. $y = f(x) = \cos x$, $D = \mathbb{R}$, $W = [-1, 1]$, nicht injektiv, surjektiv.

Darstellung von Funktionen

Funktionen können durch *Tabellen* ihrer Funktionswerte dargestellt werden:

x	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_n

$$f : \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\} \to \{y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n\}$$

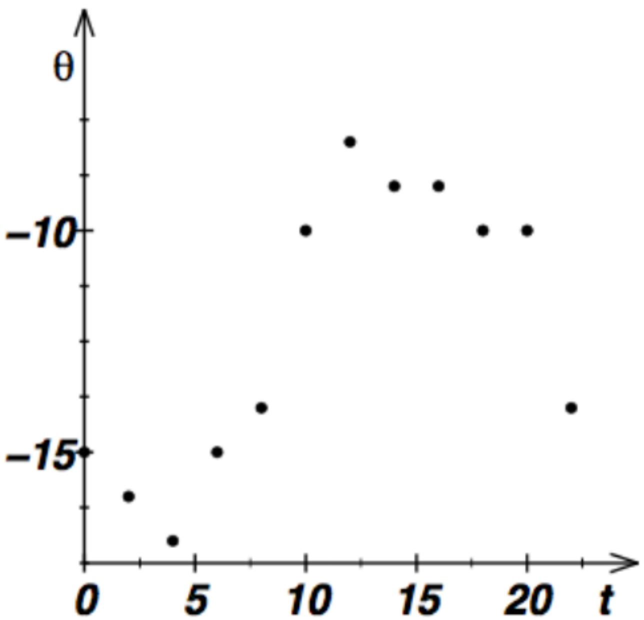
Funktionen können durch ihren *Graphen* dargestellt werden,
d.h. das *kartesische Produkt* $D \times f(D)$.
Genauer:

$$\text{Graph}(f) = \{(x, y) \in D \times f(D) : y = f(x)\} \subset D \times f(D).$$

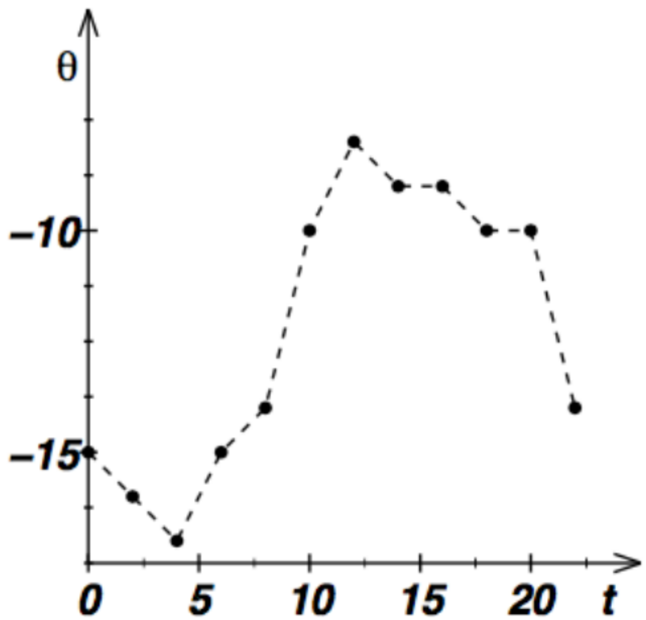
Beispiel: Temperatur in Berlin am 05.12.1998

Temperatur $\theta(t)$ in Grad Celsius ($°C$) gemessen
zur Zeit t in Stunden nach $00:00$ Uhr.

t	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
θ	- 15	-16	-17	-15	-14	-10	-8	-9	-9	-10	-10	-14



Temperaturmessreihe (Graph)



Temperaturmessreihe
(linear interpoliert)

Umkehrfunktion

Definition

Sei $f : A \to B$ bijektive Funktion.

- Jedem $x \in A$ ist genau ein $y = f(x) \in B$ zugeordnet.
- Umgekehrt ist jedem $y \in B$ genau ein $x \in A$ zugeordnet.

Also existiert $f^{-1} : B \to A$ mit

$$f^{-1}(y) = x, \text{ falls } y = f(x).$$

f^{-1} heißt *Umkehrfunktion* (oder Umkehrabbildung oder inverse Funktion).

Bemerkungen

Sei $f : A \to B$ bijektive Funktion.

- $f^{-1} : B \to A$ ist dann auch bijektiv.
- Es gilt: $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle $x \in A$.
- $D(f^{-1}) = B$, $f^{-1}(B) = A$.

Berechnung der Umkehrfunktion

Beobachtung: in $x = f^{-1}(y)$ ist y die unabhängige Veränderliche und x die abhängige Veränderliche

$\Longrightarrow$ in (x, y)-Koordinatensystem werden

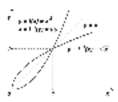
$$y = f(x) \text{ und } x = f^{-1}(y)$$

durch dieselbe Kurve dargestellt.

Algorithmus zur Berechnung der Umkehrfunktion:
Ist $f : A \to B$ bijektiv, so ergibt sich $f^{-1} : B \to A$ durch

1. $y = f(x)$ nach x auflösen ergibt: $x = f^{-1}(y)$
2. x und y vertauschen ergibt: $y = f^{-1}(x)$.

$y = f^{-1}(x)$ und $y = f(x)$ liegen spiegelbildlich zur Geraden $y = x$.



Definition

Sei $f : A \to B$ bijektive Funktion.

- Jedem $x \in A$ ist genau ein $y = f(x) \in B$ zugeordnet.
- Umgekehrt ist jedem $y \in B$ genau ein $x \in A$ zugeordnet.

Also existiert $f^{-1} : B \to A$ mit

$$f^{-1}(y) = x, \text{ falls } y = f(x).$$

f^{-1} heißt *Umkehrfunktion* (oder Umkehrabbildung oder inverse Funktion).

Bemerkungen

Sei $f : A \to B$ bijektive Funktion.

- $f^{-1} : B \to A$ ist dann auch bijektiv.
- Es gilt: $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle $x \in A$.
- $D(f^{-1}) = B$, $f^{-1}(B) = A$.

Berechnung der Umkehrfunktion

Beobachtung: in $x = f^{-1}(y)$ ist y die unabhängige Veränderliche und x die abhängige Veränderliche

$\Longrightarrow$ in (x, y)-Koordinatensystem werden

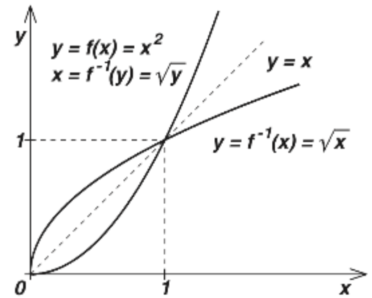
$$y = f(x) \text{ und } x = f^{-1}(y)$$

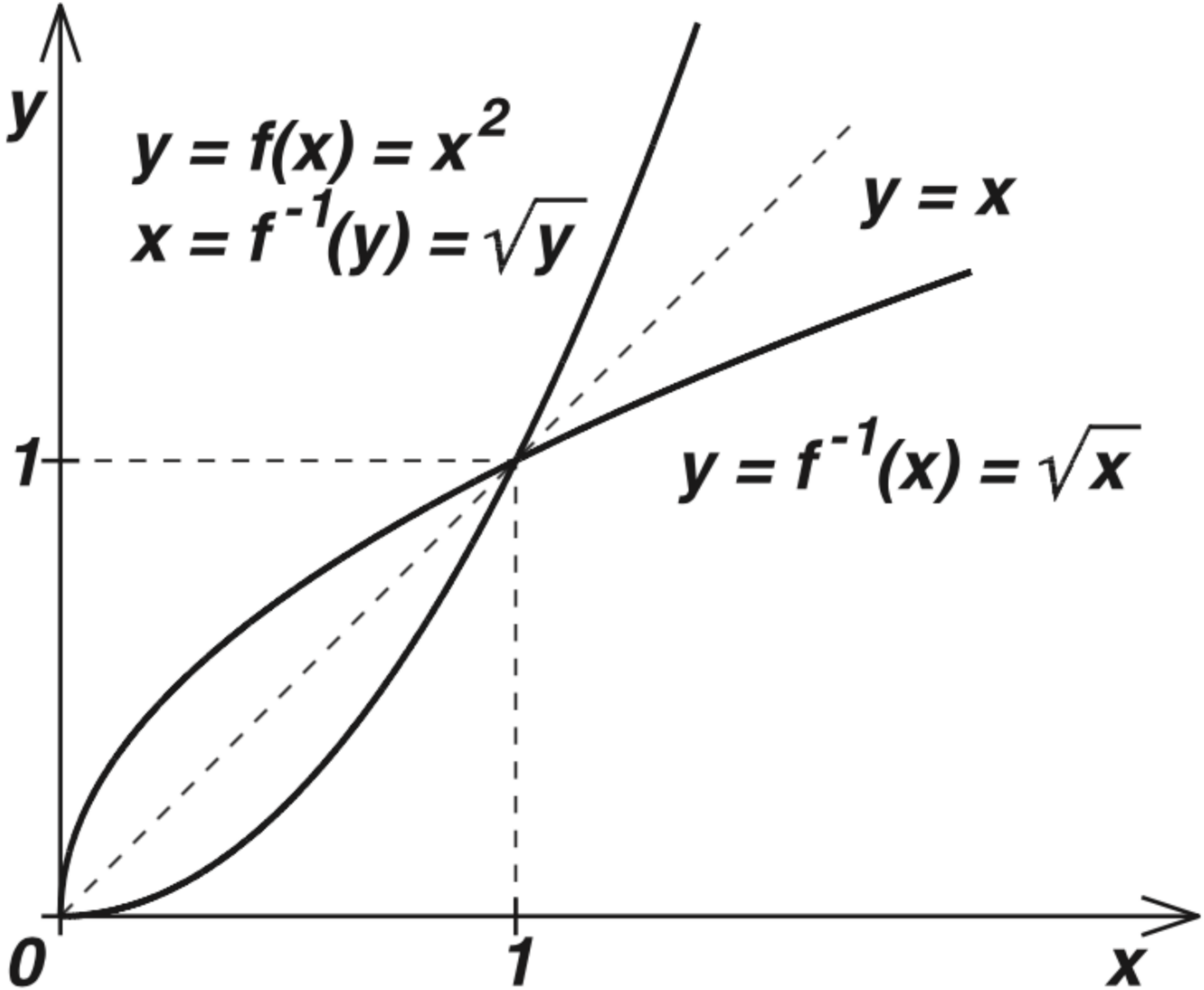
durch dieselbe Kurve dargestellt.

Algorithmus zur Berechnung der Umkehrfunktion:
Ist $f : A \to B$ bijektiv, so ergibt sich $f^{-1} : B \to A$ durch

1. $y = f(x)$ nach x auflösen ergibt: $x = f^{-1}(y)$
2. x und y vertauschen ergibt: $y = f^{-1}(x)$.

$y = f^{-1}(x)$ und $y = f(x)$ liegen spiegelbildlich zur Geraden $y = x$.




y
y = f(x) = x^2
x = f^-1(y) = √y
y = x
1
y = f^-1(x) = √x
0
1
x

Verkettete Funktionen

Definition

Seien $f : A \to B$ und $g : C \to D$ mit $B \subset C$.
Dann ist zu $x \in A$ durch f das Element $f(x) \in B$ zugeordnet, und $f(x)$ durch g das Element $g(f(x)) \in D$ zugeordnet.
Das Nacheinanderausführen von f und g liefert

$$h = g \circ f : A \to D.$$

$h = g \circ f$ heißt zusammengesetzte oder *verkettete Funktion*.

Beispiele und Bemerkung

1. $f(x) = e^x$, $g(x) = x^2$, damit: $h(x) = g \circ f(x) = (e^x)^2 = e^{2x}$.
2. $f(x) = e^x$, $g(x) = x^2$, damit: $\tilde{h}(x) = f \circ g(x) = e^{x^2}$.
3. $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt(x)$, damit: $\bar{h}(x) = f \circ g(x) = |x|$.

Bemerkung: Aus 1. und 2. ist ersichtlich: Im Allgemeinen

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

④

n

Definition

Seien $f : A \to B$ und $g : C \to D$ mit $B \subset C$.
Dann ist zu $x \in A$ durch f das Element $f(x) \in B$ zugeordnet, und $f(x)$ durch g das Element $g(f(x)) \in D$ zugeordnet.
Das Nacheinanderausführen von f und g liefert

$$h = g \circ f : A \to D.$$

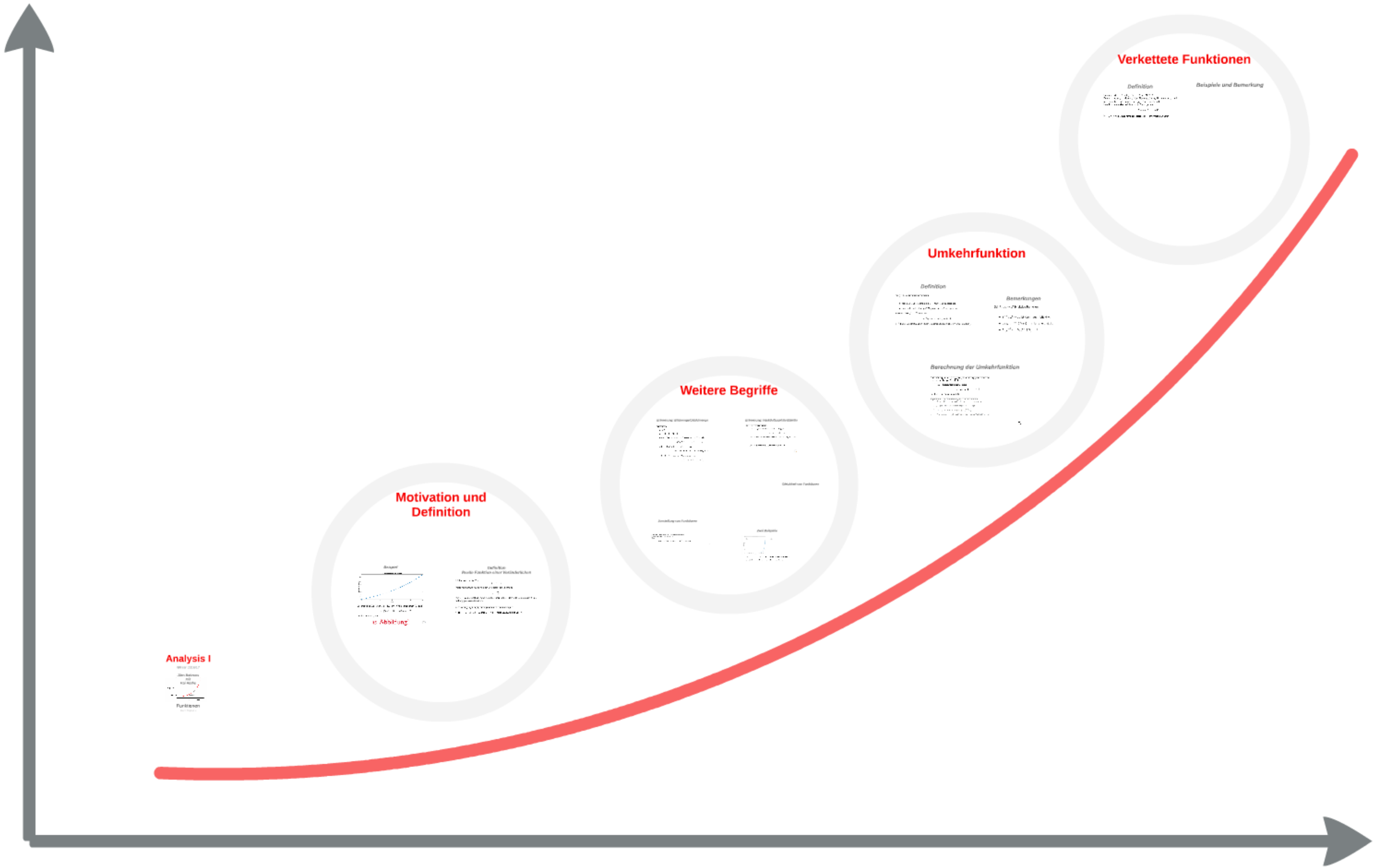
$h = g \circ f$ heißt zusammengesetzte oder *verkettete Funktion*.

Beispiele und Bemerkung

1. $f(x) = e^x$, $g(x) = x^2$, damit: $h(x) = g \circ f(x) = (e^x)^2 = e^{2x}$.
2. $f(x) = e^x$, $g(x) = x^2$, damit: $\tilde{h}(x) = f \circ g(x) = e^{x^2}$.
3. $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{(}x)$, damit: $\bar{h}(x) = f \circ g(x) = |x|$.

Bemerkung: Aus 1. und 2. ist ersichtlich: Im Allgemeinen

$$f \circ g \neq g \circ f.$$


Analysis I
Funktionen
Motivation und Definition
Weitere Begriffe
Umkehrfunktion
Definition
Bemerkungen
Berechnung der Umkehrfunktion
Verkettete Funktionen
Definition
Beispiele und Bemerkung