Analysis I

01.11.16

Rechenregeln für $\mathbb{Q}$

Seien $a, b, c, d, e \in \mathbb{Z}$ (ganze Zahlen)

$b \neq 0, \; d \neq 0, \; e \neq 0$

$ggT(a,b) = ggT(c,d) = 0$

Dann:

- $\dfrac{a}{b} \pm \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad \pm bc}{bd}$

- $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$

- $\dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad}{bc}$

Rechenregeln für $\mathbb{R}$

Sei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen.
Dann definieren die Abbildungen

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} ; \; (x, y) \mapsto x + y$$

Addition

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} ; \; (x, y) \mapsto x \cdot y$$

Multiplikation

a) Axiome der Addition: Es soll gelten

$(x+y)+z = x+(y+z) \quad x,y,z \in \mathbb{R}$ Assoziativgesetz

$x+y = y+x$ Kommutativgesetz

$x+0 = x$ Neutrales Element (Existenz der Null)

$x+(-x) = 0$ Existenz des Negativen

b) Axiome der Multiplikation:

$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ Assoziativg.

$x \cdot y = y \cdot x$ Kommutativg.

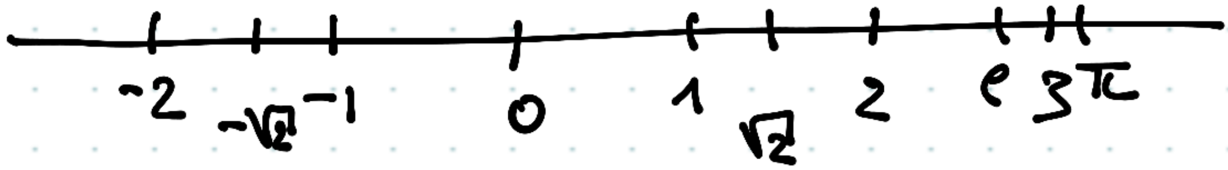
$x \cdot 1 = x$ Neutrales Element

$x \cdot x^{-1} = 1$ Existenz des inversen Elem.

c) Distributivgesetz

$x \cdot (y+z) = xy + x \cdot z$

d) Zahlengerade



e) Intervalle:

$[a,b] = \{x : x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}$ abgeschlossen

$]a,b[= \{x : -''-,\ a < x < b\}$ offen

$]a,b] = \{x : -''-,\ a < x \leq b\}$ halboffen

Beweis von 3) $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$

„$\Rightarrow$":

$$|a| < b \Rightarrow a < b \wedge -a < b$$

$$\Rightarrow a < b \wedge a > -b$$

„$\Leftarrow$":

$$-b < a < b \Rightarrow -b < a \wedge a < b$$

$$\Rightarrow b > -a \wedge b > a$$

$$\Rightarrow b > |a| \qquad \boxtimes$$

$\{a : a \in \mathbb{R}, |a| < b\}$

Analysis I

3.11.16

Rechenregeln für $\mathbb{Q}$

Seien also $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ (ganze Zahlen)

$b \neq 0, d \neq 0$

$ggT(a,b) = 1, ggT(c,d) = 1$

Dann:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Regeln in $\mathbb{R}$:

Sei $\mathbb{R}$ Menge der reellen Zahlen.
Dann definiert die Abb.

$$+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x+y \quad \text{Addition}$$
$$\cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x\cdot y \quad \text{Multiplikation}$$

a) Axiome der Addition: $x,y,z \in \mathbb{R}$
Es soll gelten

$(x+y)+z = x+(y+z)$ Assoziativgesetz

$x+y = y+x$ Kommutativgesetz

$x+0 = x$ Existenz des neutralen Elements (der Null)

$x+(-x) = 0$ Existenz des Negativen

b) Axiome der Multiplikation
Es soll gelten

$(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$ Assoziativg.

$x\cdot y = y\cdot x$ Kommutativg.

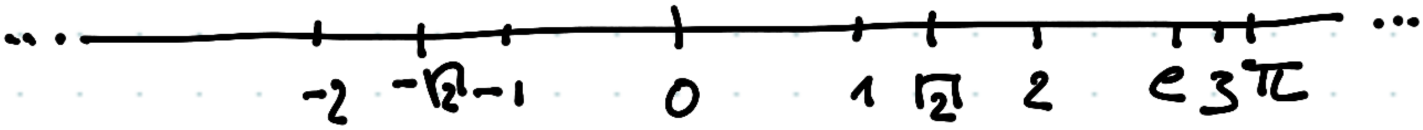
$x \cdot 1 = x$ Neutrales Elem.

$x \cdot (x^{-1}) = 1$ Existenz des Inversen

c) Distributivgesetz

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

d) Zahlengerade



e) Intervalle

$[a, b] = \{x : x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$ geschlossen

$]a, b[= \{x : x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$ offen

$]a, b] = \{x : \text{—"—}, a < x \leq b\}$ halboffen

__Beispiel__: Beweis von 3)

$$|a| < b \iff -b < a < b$$

"$\Rightarrow$": $|a| < b \Rightarrow a < b \wedge -a < b$

$\Rightarrow a < b \wedge a > -b$

$\Rightarrow -b < a < b$

"$\Leftarrow$": $-b < a < b \Rightarrow -b < a \wedge a < b$

$\Rightarrow b > -a \wedge b > a$

$\Rightarrow b > |a|$ $\boxtimes$

Komplexe Zahlenebene