

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5

Aufgabe 17:

- a) Man bestimme eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften $f(2) = 5$ und

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } -\infty < x < -1, \\ -1 & \text{für } -1 < x < 1, \\ 2x & \text{für } 1 < x < \infty \end{cases}$$

und zeichne die Funktion. Ist f auch differenzierbar?

- b) Für die Funktion f mit $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < \pi \\ ax + b, & \pi \leq x \end{cases}$ bestimme man $a, b \in \mathbb{R}$, sodass f in $x_0 = \pi$ stetig differenzierbar wird und zeichne f .
- c) Man berechne die Tangentengleichung zu $f(x) = \ln x$ im Punkt $x_0 = 1$ und fertige eine Zeichnung an.

Aufgabe 18:

- a) Man berechne die erste Ableitung der folgenden Funktionen

$$\text{i) } f(x) = x - \sinh x \cosh x, \quad \text{ii) } g(x) = (5x^2)^x.$$

- b) Man berechne die ersten beiden Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\text{i) } h(x) = \frac{x^2}{x^4 + 1}, \quad \text{ii) } k(x) = \ln(\cos x).$$

- c) Man berechne die ersten drei Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\text{i) } u(x) = 7(x-1)(x^2+x+1), \quad \text{ii) } v(x) = \sqrt{2-3x}.$$

Aufgabe 19:

- a) Gegeben sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) = x^2 + e^x - 5$.

- (i) Man zeige mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass die Funktion f mindestens zwei Nullstellen besitzt.

- (ii) Man zeige mit Hilfe des Satzes von Rolle, dass f höchstens zwei und damit dann genau zwei Nullstellen besitzt.
- (iii) Man berechne die beiden Nullstellen x^* mit Hilfe des Bisektionsverfahrens aus Aufgabe 15 bis auf einen absoluten Fehler von $|\tilde{x} - x^*| \leq 10^{-10}$.

b) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{für } x < \pi/2, \\ (x - \pi/2)^2 + 1 & \text{für } \pi/2 \leq x. \end{cases}$$

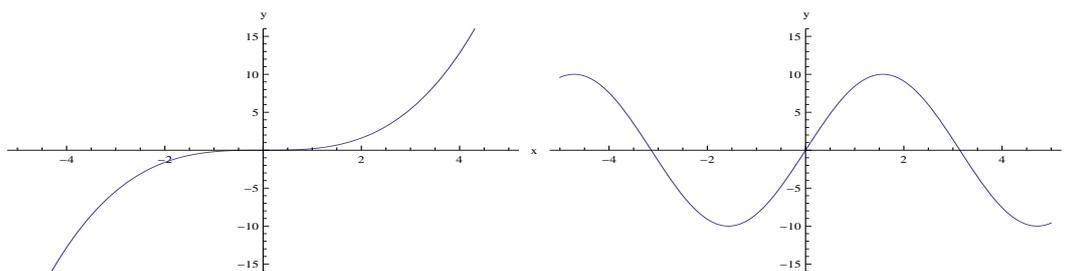
- (i) Man berechne $f'(x)$ und $f''(x)$.
- (ii) Ist der Mittelwertsatz $g'(x_0) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$ mit $x_0 \in]a, b[$ für $a = 0$ und $b = \pi$ auf $f(x)$ und $f'(x)$ anwendbar? Man bestimme gegebenenfalls die Zwischenstelle(n) x_0 .

Aufgabe 20:

a) Man berechne die folgenden Grenzwerte

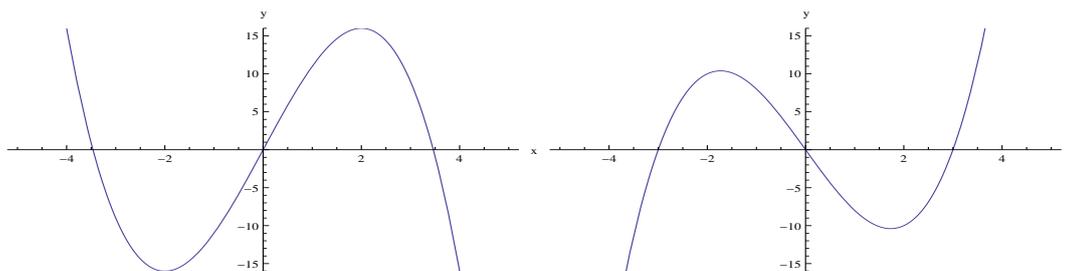
$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(x^2)} - 1}{1 - \cos x}, \quad (ii) \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(\frac{2x + 3}{2x - 1} \right).$$

b) Nur die Ableitung $g'(x) = 3x^2 - 9$ ist von der reellwertigen Funktion g bekannt. Man gebe die Monotoniebereiche von g an und klassifiziere alle Extremwerte. Anschließend begründe man, welcher der unten angegebenen Funktionsgraphen g_i mit dem von g übereinstimmt.



Funktion g_1

Funktion g_2



Funktion g_3

Funktion g_4

Abgabetermin: 16.1. - 20.1.17 (zu Beginn der Übung)