Analysis handschriftliche Folien

Michael Hinze

Fachbereich Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

22. Oktober 2015

Notizen

Etwas zu den reellen Zahlen $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ sei die Menge der reellen Zahlen

$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto x+y$ Addition

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto x \cdot y$ Multiplikation

I Axiome der Addition

$\forall x,y,z \in \mathbb{R}:$

$(x+y)+z = x+(y+z)$ Assoziativgesetz

$x+y = y+x$ Kommutativgesetz

$x+0 = x$ Existenz der Null, neutrales Element

$x+(-x) = 0$ Existenz des Negativen

Notizen

II Axiome der Multiplikation

$\forall x,y,z \in \mathbb{R}$:

$$(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z) \qquad A$$
$$x\cdot y = y\cdot x \qquad K$$
$$x\cdot 1 = x \qquad \text{Neutrales Element } 1$$
$$x x^{-1} = 1 \qquad \text{Existenz des Inversen}$$

III Distributivgesetz

$\forall x,y,z \in \mathbb{R}$: $x\cdot(y+z) = x\cdot y + x z$

Definition der natürlichen Zahlen:

Sei $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ die kleinste Menge mit

i) $1 \in \mathbb{N}$

ii) $x \in \mathbb{N} \rightarrow x+1 \in \mathbb{N}$

Notizen

Dann ist $\mathcal{N} = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, denn $\mathcal{N}$ erfüllt die Peano Axiome 1.) – 5.) auf Folie 4.

Nachweis: SgL (Selbstgestricktes Lemma), erinnere Diskussion in der VL.

Folgerung aus dem Induktionsprinzip

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A(n)$ eine Aussage, z.B.

$$A(n-2): \quad n^2 > 2n+1 \qquad \text{für } n \geq 3$$

Sei $M := \{n ; A(n) \text{ wahr}\}$. $\quad 1 \in M \vee n \in M \to \overbrace{n+1 \in M}^{\text{d.h. } A(n+1) \text{ wahr}} \to M = \mathbb{N}$

Notizen

Bsp 1: Nachweis von $A(n)$ wahr für $n \geq 3$

Induktionsanfang für $n_0 = 3$: $A(n_0)$: $n_0^2 > 2n_0 + 1$

$9 > 7$ wahr

Induktionsvoraussetzung: $A(n)$ sei wahr, d.h. $n^2 > 2n+1$.

Induktionsschritt: $A(n)$ wahr $\xrightarrow{\text{daraus folgt}}$ $A(n+1)$ wahr

z.zeigen: $(n+1)^2 > \underbrace{2(n+1)+1}_{2n+3}$, falls $n^2 > 2n+1$

$$(n+1)^2 = n^2+2n+1$$

$$2n+1+2n+1 = 2n+2+2n > 2n+3 \checkmark$$

Notizen

Weitere Beispiele

Bsp 2: Zeige $\sum_{k=0}^{n} k = \underbrace{1+2+3+\dots+n}_{(1+n)+(2+n-1)+\dots+(} = \frac{n(n+1)}{2}$

ist wahr für jedes $n \in \mathbb{N}$.

$= \frac{n}{2}(n+1)$

Induktionsbeweis

IA : $n_0 = 1$ $\quad \sum_{k=0}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ ✓

IV : $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n}{2}(n+1)$

IS : $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n}{2}(n+1) \longrightarrow \sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Notizen

Nachweis: $\sum_{k=0}^{n+1} k = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} k}_{} + n+1$

$\overset{IV}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ $\boxtimes$

<u>Bsp 3</u>: Zeige $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

IA: $n=1$ $\sum_{k=0}^{1} q^k = 1+q = \frac{(1+q)(1-q)}{1-q} = \frac{1-q^2}{1-q}$ ✓

IV: $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \overset{!}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$

IS: $\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} \overset{IV}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$ $\boxtimes$

Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg

Dr. H. P. Kiani

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Vertretung für Prof. Hinze: Vorlesung 1

WiSe 2015/16

Zahlen, Vollständige Induktion

Die ins Netz gestellten Kopien der Folien sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig. Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden mündlich während der Veranstaltung angesagt.

- **<u>Vorlesung:</u>** Prof. Dr. M. Hinze

Übertragung H0.016

Di 13:15-14:45, Audimax I (BU, BVT, LUM, MB, SB, VT),
Start 20.10
Do 11:30-13:00, Audimax II (AI, ET, EUT, IN, MTB),
Start 22.10

Buch:Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler von Prof. Dr. Günter Bärwolff,Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN:3827414369.

- **Übungen :** 36 Gruppen, ca. 20 Tutoren, **Anmeldung erforderlich!**, siehe

Kursbelegung im Intranet der TUHH

14-täglich im Wechsel mit den Übungen zur Linearen Algebra

- **Übungsaufgaben Analysis:**

http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a1/1516/lm.html

Abgabe Hausaufgaben: in Gruppen von 2-6 Personen

- **Anleitungen/Hörsaalübung:**
  Brücke zwischen Vorlesung und Übung/Klausur, Audimax I

  14-täglich im Wechsel mit Hörsaalübungen Lineare Algebra

  Lineare Algebra: Dr. Jens-Peter Zemke,
  Analysis: Dr. Hanna Peywand Kiani

  Mo 14:45-16:15 Uhr, **VT, BV, EU, LUM**, BU, AI, Start 19.10

  Di 09:45-11:15 Uhr, ET, IN/IIW, MB, MTB/MEC, SB, Start: 20.10

- Alle Infos, Alles an Material zu Analysis (alte Klausuren, Sprechstunden etc.) unter

http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/index.html

Kiani: Tel. 42838-4940

e-mail: kiani at math.uni-hamburg.de

Sprechstunden: Raum 3078, SBS95 (Lindwurm)

Bezeichnungen, Begriffe:

- **Menge:** Aufzählung von Elementen

  $M := \{a, b, c\}, \qquad b \in M, \qquad 2 \notin M$

  definieren

- **Leere Menge:** $\emptyset = \{\,\}$

- **Teilmenge:** $\tilde{M}$ ist eine Teilmenge von M : $\tilde{M} \subset M$: genau dann wenn

  $$a \in \tilde{M} \overset{\text{folgt}}{\Longrightarrow} a \in M$$

- **Natürliche Zahlen** $:= \mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$

  Axiomatische Charakterisierung:

  Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} := \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$ wird durch die **Peano Axiome** definiert.

Axiome von Peano: Folie 4 Professor Hinze

– $1 \in \mathbb{N}$,

$\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

– Jede natürliche Zahl n hat genau einen Nachfolger n'.
($1' = 2$, $2' = 3$, $\ldots$)

$1 \to 1' = 2 \to 2' = 3 \to 3'' = 1$

– 1 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.

– $n, m \in \mathbb{N} \overset{\text{und}}{\wedge} n \neq m \overset{\text{folgt}}{\Longrightarrow} \overset{n' \neq m'}{n + 1 \neq m + 1}$.

$1 \to 2 \to 3 = 2' \to 3' = 4 \to 2$

Hieraus folgt auch, dass jede natürliche Zahl außer 1 genau einen Vorgänger hat.

$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to \ldots$: A

$0{,}5 \to 1{,}5 \to 2{,}5 \to \ldots$

– Sei $A \subset \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\big(1 \in A \overset{\text{und}}{\wedge} (n \in A \Longrightarrow n' \in A)\big) \Longrightarrow A = \mathbb{N}.$$

In Worten: Ist 1 aus A und gilt für jedes $n \in A$, dass der Nachfolger n' zu A gehört, so ist $A = \mathbb{N}$.

Letzte oben aufgeführe Eigenschaft ist Grundlage des

- **Prinzips der vollständigen Induktion**

  Situation:

  Eine Aussage(form) A(n), die von der Zahl $n \in \mathbb{N}$ abhängt, soll für alle $n (\geq n_0)$ aus $\mathbb{N}$ bewiesen werden.

Beispiele: $A(n): n^2 \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

– Behauptung a) $\underbrace{n^2 > 2n+1}$, $\qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ n \geq 4 = n_0$

$n = 1 \qquad 1^2 \not> 2 \cdot 1 + 1 = 3$

– Behauptung b) Für jede beliebige natürliche Zahl n gilt:

$$\cancel{\sum_{k=1}^{n} k^3} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 7^3 + 8^3 = \frac{8^2 \cdot 9^2}{4}$$

– Behauptung c)

für alle

$\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: Es gibt $n!$ verschiedene Möglichkeiten n verschiedene Objekte zu sortieren (**Permutationen**)

Mögliche Beweismethode: vollständige Induktion $-->$

Folie 5 Prof. Hinze

Beispiel 1) Vermutung: Für $n \in \mathbb{N}$ groß genug, gilt: $n^2 > 2n+1$

$n = 1:$ $1^2 = 1 \not> 3 = 2 \cdot 1 + 1$

$n = 2:$ $2^2 = 4 \not> 5 = 2 \cdot 2 + 1$

$n = 3:$ $3^2 = 9 > 7 = 3 \cdot 2 + 1$ ✓

$n = 4:$ $16 > 9 = 4 \cdot 2 + 1$ ✓

Behauptung:

Beweis mittels vollständiger Induktion

Zu zeigen: $n^2 > 2n+1$ $\quad \forall n \geq 3$

Induktionsanfang: $n = n_0 = 3$

$$3^2 > 7 \quad ✓$$

Induktionsvoraussetzung: für ein beliebiges, festes $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$N^2 > 2 \cdot N + 1 \qquad \text{(IV)}$$

Induktionsschritt: z.Z. $(N+1)^2 > 2(N+1)+1$ Ziel

$$(N+1)^2 = N^2 + 2 \cdot N + 1^2 \overset{\text{IV}}{>} 2N+1 + 2N+1$$

$$> 2N+1 + 2 \cdot 1 + 1$$

$$> 2N+1+2$$

?

$2N + 2 + 1$ Ziel

Beispiel 2) Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\cancel{\sum_{k=1}^{n} k} = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktionsanfang: $n_0 = 1$ $\qquad 1 \overset{?}{=} \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$ ✓

Induktionsvoraussetzung: für ein N gelte

$$\underbrace{1 + 2 + 3 + \cdots + N} = \frac{N(N+1)}{2}$$

Induktionsschritt:

Ziel

$$\underbrace{1 + 2 + 3 + \cdots + N} + (N+1) = \frac{(N+1)(N+1+1)}{2}$$

$$\underbrace{1 + 2 + 3 + \cdots + N} + N + 1 \overset{IV}{=} \frac{N(N+1)}{2} + (N+1) \cdot \frac{2}{2} = \frac{N(N+1) + 2(N+1)}{2}$$

$$= \frac{(N+1)(N+2)}{2} \quad ✓$$

Andere Beweisidee?

$$\begin{array}{l} 1 + 2 \ \cdots \ + n \\ n + n-1 \ \cdots \ 1 \\ \hline (n+1) + (n+1) \quad (n+1) \end{array}$$

Beispiel 3) Für alle Zahlen $q \neq 1$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$q = 1$ $\quad \frac{0}{0}$

$q = 2$: $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^7 = \frac{1 - 2^8}{1-2}$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \underset{q^0}{1} + q^1 + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Induktionsanfang: $n = 1$

$$1 + q^1 \overset{?}{=} \frac{1 - q^2}{1 - q} = \frac{\cancel{(1-q)}(1+q)}{\cancel{(1-q)} \cdot 1} \quad ✓$$

Induktionsvoraussetzung: für ein $N \in \mathbb{N}$

$$1 + q^1 + \cdots + q^N = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$$

Induktionsschritt: zu zeigen ✓ Ziel

$$\underbrace{1 + q^1 + \cdots + q^N}_{} + q^{N+1} = \frac{1 - q^{N+1+1}}{1 - q}$$

$$\frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} + q^{N+1} \cdot \frac{1-q}{1-q} = \frac{1 - q^{N+1} + q^{N+1} - q^{N+1} \cdot q^1}{1 - q}$$

Andere Beweisidee?

$$= \frac{1 - q^{N+2}}{1 - q} \quad ✓$$

Beispiel 4: Wie viele Teilmengen besitzt eine Menge M_n mit n Elementen?

Anzahl

$n = 1: \; M_1 = \{t_1\}$ $\qquad \{\;\} \qquad \{t_1\} \qquad 2$

$n = 2: \; M_2 = \{t_1, t_2\}$ $\qquad \{\;\} \qquad \{t_1\} \qquad 2$

$\{t_2\} \qquad \{t_2, t_1\} \qquad 2$

$2 \cdot 2$

$n = 3: \; M_3 = \{t_1, t_2, \underline{\underline{t_3}}\}$ $\qquad \{\;\} \qquad \{t_1\} \qquad \{t_2\} \qquad \{t_1, t_2\}$

$\{t_3\} \qquad \{t_1, t_3\} \qquad \{t_2, t_3\}$

$\{t_1, t_2, t_3\}$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot$

Vermutung: Eine n-elementige Menge hat 2^n Teilmengen. $\forall n \in \mathbb{N}$

Induktionsanfang: $n = 1$ oben

Induktionsvoraussetzung: M_N hat 2^N Teilmengen

Induktionsschritt: M_{N+1} hat 2^{N+1} Teilmengen

Beispiel 5:

Bezeichnungen, Begriffe:

– **Permutation:** Umordnung

Beispiel: $M = \{1, 2, 3\}$. Permutationen der Elemente von M:

1 2 3
1 3 2

2 1 3
2 3 1

3 1 2
3 2 1

- 1
  - 2 — 3
  - 3 — 2
- 2
  - 1 — 3
  - 3 — 1
- 3
  - 1 → 2
  - 2 — 1

Optionen $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$

– **Fakultät:** Definiere für $k \in \mathbb{N}$: $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-1) \cdot k$

Behauptung: Es gibt $n!$ Permutationen einer $n-$elementigen Menge. Beweis: Übungsaufgabe

Beispiel 6:

Zwei aus der Schule bekannte Begriffe:

Seien $n, m \in \mathbb{N}$. $\quad 2 \mid 6$ $\quad$ Es gibt

m heißt **Teiler** von $n \overset{\text{genau dann}}{\underset{\text{wenn}}{\iff}}: m|n \overset{\text{g.d.w.}}{\iff} \exists k \in \mathbb{N} : n = k \cdot m$.

$\underset{=}{|}$ $\quad k = 3$ $\quad 6 = 3 \cdot 2$

$n > 1$ heißt **Primzahl**, wenn $m|n \implies m = 1 \vee m = n$.

Folie 6 Professor Hinze : Hauptsatz der Zahlentheorie, Primfaktorzerlegung

Beweis: Übung. $\quad 2 \quad 3 \quad \cancel{4} \quad 5 \quad \cancel{6} \quad 7$

$2 \times 2 \qquad 2 \cdot 3$

$$180 = 2 \cdot 90 = 2 \cdot 3 \cdot 30 = 2 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 3$$
$$= \underline{\underline{2}} \cdot 3 \cdot \underline{\underline{2}} \cdot 5 \cdot 3$$
$$= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1$$

Weitere Zahlenmengen:

$\forall n, m \in \mathbb{N}$

Was kann man **in** $\mathbb{N}$ machen?

$n + m \in \mathbb{N}$

$m \cdot n \in \mathbb{N}$

$m - n$ $\quad 2 - 4$

m / n $\quad 2/4$

$m + x = n$ $\quad x = n - m$

$n \cdot x = m$ $\quad x = \frac{m}{n}$

Folie 7 Prof. Hinze

$\mathbb{Z} =$ **Menge der ganzen Zahlen** $:= \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$

$\mathbb{Z}$ abgeschlossen bzgl. Addition, Substraktion, Multiplikation

$\forall\, m, n \in \mathbb{Z}$:

$(n + m) \in \mathbb{Z}$ $\quad \underbrace{n - m}_{\in \mathbb{Z}}$ $\quad n \cdot m \in \mathbb{Z}$ $\quad \frac{m}{n} = ?$ $\quad \frac{2}{4} \notin \mathbb{Z}$

$m + x = n$ ✓

$n \cdot x = m$ $\quad x = \frac{m}{n} \quad m, n \in \mathbb{Z}$

$\frac{1}{2} \quad \frac{2}{4} \quad \frac{3}{6} = \frac{\cancel{3}^1 \cdot 1}{2^1 \cdot \cancel{3}^1}$

Folien 8-9 Prof. Hinze

$\mathbb{Q}$ = Menge der rationalen Zahlen

$$:=\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0,\ m, n \text{ teilerfremd}\}$$

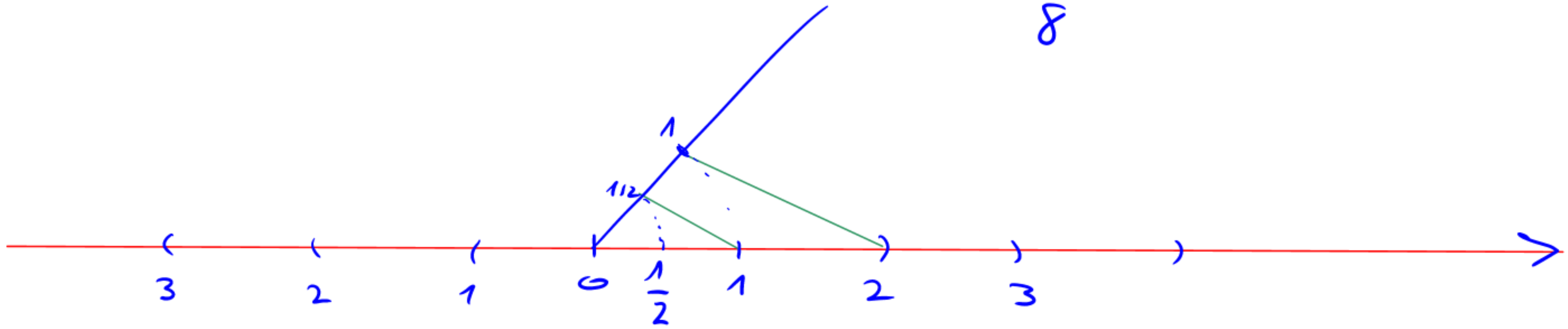
$a \in \mathbb{Q} \implies a$ ist als periodische Dezimalzahl darstellbar:

$2 : 12 = 0{,}16\overline{6}$

$$\begin{array}{r} 0 \\ \hline 20 \\ 12 \\ \hline 80 \\ 72 \\ \hline 80 \\ 72 \\ \hline 8 \end{array}$$

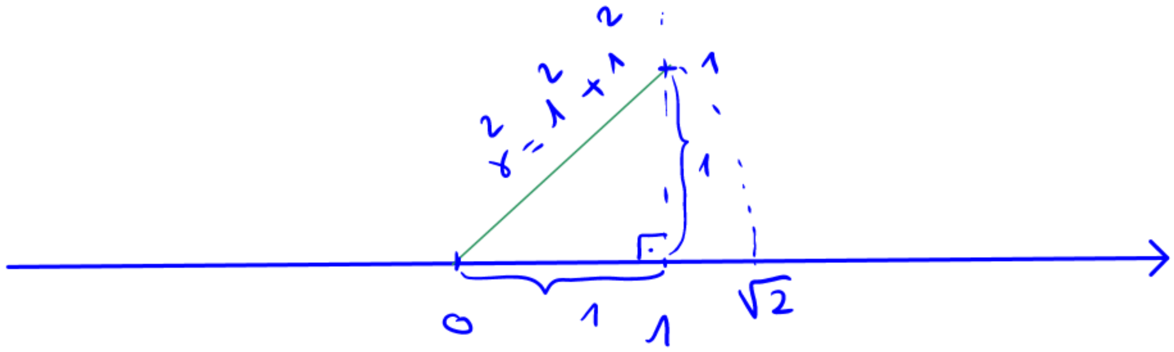
$\frac{2}{12} = 0{,}16666\ldots$

$\frac{17}{8} = 2{,}125000$



Reelle Zahlen $\mathbb{R}$

Zahlengerade:



Irrationale Zahlen

Folie 10 Prof. Hinze

Reelle Zahlen $\mathbb{R} =$ Vereinigung der rationalen (periodischen Dezimalzahlen) und der irrationalen (nicht periodischen Dezimalzahlen) Zahlen.

$\mathbb{R}$ ist bzgl. Addition, Substraktion, Multiplkation, Division abgeschlossen.

Speziel $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt: $y = x^2 = x \cdot x \in \mathbb{R}$

Wie sieht es mit der Umkehrung aus?

$$\text{Sei } y \in \mathbb{R} \text{ beliebig. Frage:} \quad \exists\, x \in \mathbb{R} : x^2 = y\,?$$ $x^2 = -1$

Also: Gibt es $x \in \mathbb{R}$ mit $x = y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{y}$?