Analysis handschriftliche Folien

Michael Hinze

Fachbereich Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

12. Januar 2016

Notizen

Folgerungen aus dem Mittelwertsatz (MWS)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) diffbar. Dann gibt es $x_0 \in (a,b)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

i) Fehlerabschätzung: Seien $x, y \in D(f)$ und f diffbar. Dann gilt

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y-x)$$

mit ξ zwischen y und x nach dem MWS

Damit

$$|f(y)-f(x)| = |f'(\xi)|\,|y-x| \overset{\text{falls } x<y}{\leq} \max_{\xi \in [x,y]} |f'(\xi)|\,|y-x|$$

D.h. f ist auf $[x,y]$ Lipschitz stetig mit Lipschitz Konstante $L := \max_{\xi \in [x,y]} |f'(\xi)|$.

Notizen

f L-stetig mit Konst. L $:\Longleftrightarrow$ $|f(x)-f(y)| \le L|x-y| \quad \forall x,y$

Bsp $f(x) = \cos x$;

$$|f(x)-f(y)| = |\cos x - \cos y| \le \max_{\xi \in [x,y]} |f'(\xi)|\,|x-y| = \max_{\xi\in[x,y]} |-\sin \xi|\,|x-y| \le |x-y|,$$

d.h. $f(x) = \cos x$ ist L-stetig mit Konstante $L = 1$

MWS, Anwendung 2: Gilt $f'(x) \ge 0$ $(\le)$ $\forall x$, so ist f monoton wachsend (fallend).

Sei $f'(x) \ge 0$ $\forall x$. Zeige $f(x) \le f(y)$ für $x < y$.

Es gilt mit dem MWS

$$f(y)-f(x) = \underbrace{\underbrace{f'(\xi)}_{\ge 0}\underbrace{(y-x)}_{>0}}_{\ge 0} \quad \text{mit } \xi \text{ zwischen } x \text{ und } y.$$

$\longrightarrow f(y) \ge f(x)$, was zu zeigen war.

Folgerung: $f'(x) > 0 \ \forall x \Longrightarrow f$ streng monoton wachsend! (Keine Äquivalenz, $f(x) = x^3$!)

Notizen

Die Grenzwertregeln von Bernoulli - L'Hospital

Was passiert bei Grenzwerten $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, falls

i.) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ " $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$ "

ii.) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ " $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ "

Dabei sei $-\infty \le x_0 \le +\infty$

Bsp zu i.): $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Idee: Wende MWS (in seiner verallgemeinerten Form) an; Seien $f,h:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und in (a,b) diffbar mit $h'(x) \neq 0$ $\forall x\in(a,b)$. Dann gibt es $x_0 \in (a,b)$ mit

$$\frac{f'(x_0)}{h'(x_0)} = \frac{f(b)-f(a)}{h(b)-h(a)}.$$

Notizen

Betrachte oben Fall i.), also $\underbrace{\lim_{x\to x_0} f(x)}_{=f(x_0)} = 0 = \underbrace{\lim_{x\to x_0} g(x)}_{g(x_0)}$

Damit gilt

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} \overset{\text{VMWS}}{=} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \text{mit } \xi \text{ zwischen } x \text{ und } x_0$$

IA: $\lim\limits_{z\to x_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = c$ mit $-\infty < c < +\infty$. Dann gilt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = c,$$

weil mit $x \to x_0$ auch $\xi \to x_0$ strebt.

In unserem Beispiel: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

Hier: $x_0 = 0$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = x$, also $f'(x) = \cos x$, $g'(x) = 1$.

Notizen

Weiteres Beispiel für "$\frac{0}{0}$": $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(\tan x - x)'}{(x - \sin x)'} = \dots =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{-2+3\cos x} = 2$$

Aussage lautet: Existiert in den o.g. Fällen i) und ii) der Grenzwert $c := \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, so gilt im Fall

i) $g(x) \neq 0 \quad \forall x \neq x_0$ und $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = c$,

ii) $g(x) \neq 0 \quad \forall x \geq M$ ($x \leq -M$ im Fall $-\infty$) und $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = c$.

Bsp: Seien $a, \alpha > 0$ und betrachte $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{ax}}{x^\alpha}$ Situation "$\frac{\infty}{\infty}$".

Dann $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{ax}}{x^\alpha} = \left(\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{a}{\alpha}x}}{x}\right)^\alpha = \left(\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{a}{\alpha} e^{\frac{a}{\alpha}x}}{1}\right)^\alpha = +\infty$,

Notizen

d.h. die Exponentialfunktion wächst stärker als jede Potenz(funktion).

Bsp: $\alpha > 0$

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} \qquad \text{Situation } \frac{-\infty}{+\infty}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = -\frac{1}{\alpha} \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{-\alpha}} = -\frac{1}{\alpha} \lim_{x\to 0} x^\alpha = 0.$$

Bsp, das mit Bernoulli-L'Hospital nicht behandelbar:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2\sqrt{1-\cos x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos x}\,\cos x}{\sin x} \qquad \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

(falls B L'Hospital anwendbar!

Weitere Anwendung von B L'Hospital führt hier nicht zum Ziel, weil immer wieder "$\frac{0}{0}$" erzeugt wird.

Ausweg: Das lineare Modell für $\cos x$ bei $x_0 = 0$ verwenden; $\cos x = 1 + R(x)$

Notizen

$\Rightarrow \quad -\sin x = k'(x)$, d.h. $k'(x) \sim -x$ in der Nähe von $x_0 = 0$,

weil ja $\sin x = x + h(x)$, d.h. linearen Modell von $\sin x$ bei $x_0 = 0$ ist x!

Also $k(x) \sim -\frac{1}{2}x^2$, d.h. $\cos x \sim 1 - \frac{1}{2}x^2$ bei $x_0 = 0$

$\Rightarrow \quad \sqrt{1-\cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}}|x|$ bei $x_0 = 0$

$$\Rightarrow \quad \lim \frac{\sin x}{2\sqrt{1-\cos x}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{|x|} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Der Satz von Taylor, Verfeinerung der Modellierung!

Idee: Verbesserung des linearen Modells falls f bei x_0 2-mal diffbar!

Ansatz $\quad f(x) = \underbrace{t_1(x) + a_2(x-x_0)^2}_{\text{quadr. Modell}} + k_2(x)$, wobei

$t_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ das lineare Modell bezeichne

Notizen

Ziel: Bestimme a_2 und $k_2(x)$

Wir wissen: $f'(x)$ besitzt ein lineares Modell, d.h.

$$f'(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x-x_0) + h(x) \quad \text{mit} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{h(x)}{x-x_0} = 0.$$

Andererseits liefert unser Ansatz

$$f'(x) = t_1'(x) + 2a_2(x-x_0) + k_2'(x)$$
$$= f'(x_0) + 2a_2(x-x_0) + k_2'(x)$$

$$\longrightarrow \quad 2a_2 + \frac{k_2'(x)}{x-x_0} = f''(x_0) + \frac{h(x)}{x-x_0}$$

Wähle $a_2 := \frac{1}{2} f''(x_0)$. Dann ergibt sich $k_2'(x) = h(x)$

und wir wissen: $k_2(x) = f(x) - t_1(x) - a_2(x-x_0)^2$

Notizen

Damit folgt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{k_2(x)}{(x-x_0)^2} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{k_2'(x)}{2(x-x_0)} = \frac{1}{2} \lim_{x\to x_0} \frac{h(x)}{x-x_0} = 0$$

Insgesamt:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2}_{t_2(x)} + k_2(x)$$

quadratisches Modell.

mit $\lim_{x\to x_0} \frac{k_2(x)}{(x-x_0)^2} = 0$

Analysis handschriftliche Folien

Michael Hinze

Fachbereich Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

14. Januar 2016

Universität Hamburg

Notizen

Folgerungen aus dem MWS: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, auf (a,b) diffbar. Dann gibt es $x_0\in(a,b)$ mit $f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

i) Fehlerabschätzung: sei f diffbar, $x,y\in D(f)$. Dann gilt

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(\xi) \quad \text{mit } \xi \text{ zwischen } x \text{ und } y$$

$x<y$ OE

$$\Rightarrow \quad |f(x)-f(y)| = |f'(\xi)|\,|x-y| \le \max_{z\in[x,y]} |f'(z)|\,|x-y| ,$$

d.h. f ist Lipschitz stetig mit Konstante $L:=\max_{z\in[x,y]}|f'(z)|$. Dabei heißt eine Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ Lipschitz (kurz L-) stetig mit Konstante L größer Null, falls

$$|f(x)-f(y)|\le L\,|x-y| \quad \forall x,y\in[a,b]$$

Notizen

Bsp: $f(x) = \cos x$. Dann gilt $f'(x) = -\sin x$, also

$$|\cos x - \cos y| \le \max_{z \in [x,y]} |-\sin z|\, |x-y| \le 1\,|x-y|,$$ d.h. hier ist $L = 1$

ii) MWS und Monotonie. $f'(x) \geq 0$ ($\leq$) $\forall x \to f$ monoton wachsend (fallend), strikt, falls $>$ ($<$) gilt.

Nachweis: Sei $x < y$. Dann sollte $f(x) \le f(y)$.

MWS: $$\underbrace{\frac{f(x)-f(y)}{x-y}}_{x-y\,<\,0} = \underbrace{f'(\xi)}_{\geq 0} \quad \text{mit } \xi \in (x,y) \to f(x) - f(y) \le 0,$$

also $f(x) \le f(y)$.

Achtung: f streng monoton $\cancel{\Leftrightarrow}$ $f' \neq 0$ überall; z.Bsp $f(x) = x^3$.

Notizen

Grenzwertsatz von Bernoulli – L'Hospital: es gelte für $-\infty \le x_0 \le +\infty$

i.) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$

ii.) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$

Uns interessiert, ob wir Aussagen über $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ machen können.

Bsp: $\underbrace{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}}_{=1}$! , d.h. i.) mit $f(x) = \sin x$, $g(x) = x$, $x_0 = 0$

Verallg. MWS: Es gibt ξ mit $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. Betrachte Situation

i.) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} \overset{\text{VMWS}}{=} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ mit ξ zwischen x und x_0, falls f, g diffbar und $g' \neq 0$

Notizen

Falls jetzt $\lim\limits_{z \to x_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = c$, d.h. Limes existiert, so ergibt sich

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = c,$$

weil mit $x \to x_0$ und ξ zwischen x und x_0 auch $\xi \to x_0$ strebt. D.h. unser Grenzwert existiert.

Bsp: $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

Gesamte Aussage: Folien 79/80 und handschriftlich 12.1.16.

Bsp $$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{ax}}{x^\alpha} \quad \text{mit } a, \alpha > 0$$

$$\overset{\shortparallel}{\lim_{x \to \infty}} \left(\frac{e^{\frac{a}{\alpha} x}}{x} \right)^\alpha = \left(\lim_{x \to \infty} \frac{e^{\frac{a}{\alpha} x}}{x} \right)^\alpha = \left(\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{a}{\alpha} e^{\frac{a}{\alpha} x}}{1} \right)^\alpha = \infty,$$

Notizen

d.h. Exponentialfunktionen steigen (wachsen) schneller als jede Potenz-funktion.

Bsp, $\alpha > 0$: $\lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha} \ln x = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = -\lim \frac{-\ln x}{x^{-\alpha}} \quad = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$

$\overset{\text{L'Hospital}}{=} - \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{x}}{-\alpha\, x^{-\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha} \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^{-\alpha}} = 0.$

Bsp Bernoulli-L'Hospital geht nicht immer!

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{2\sqrt{1-\cos x}} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x \sqrt{1-\cos x}}{\sin x} = \dots \quad \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$

Ausweg: Lineares Modell für $\cos x$ verwenden (bei $x_0 = 0$)

$\cos x = 1 + k(x)$ mit $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{k(x)}{x} = 0$

Notizen

Damit

$$-\sin x = (\cos x)' = k'(x) \sim -x \quad \text{in der Nähe von } 0$$

$$\overset{?}{-x} \quad \longrightarrow \quad k(x) \sim -\frac{1}{2}x^2 \quad \Longrightarrow \quad \cos x \sim \underbrace{1-\frac{1}{2}x^2}_{\substack{\text{quadratisches} \\ \text{Modell} \\ \text{für Cosinus}}}$$

bei $x_0 = 0$

$$\longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2\sqrt{1-\cos x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2\sqrt{\frac{1}{2}x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{|x|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Taylor Formel; polynomiale Modelle für n-mal diffbare Funktionen

Motivation für $n=2$; Ziel: quadratisches Modell für $f(x)$ herleiten bei x_0.

Ansatz

$$f(x) = \underbrace{\overbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}^{t_1(x)} + a_2(x-x_0)^2}_{\text{quadratisches Modell } t_2(x)} + k_2(x)$$

Notizen

Bestimme a_2 und zwar so, dass $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{k_2(x)}{(x-x_0)^2} = 0$.

Wir wissen: f' diffbar bei x_0, also

$$f'(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x-x_0) + h(x) \quad \text{mit} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{h(x)}{x-x_0} = 0$$

Auch gilt

$$f'(x) = f'(x_0) + 2a_2(x-x_0) + k_2'(x)$$

Daher wähle

$$a_2 := \frac{1}{2} f''(x_0). \quad \text{Dann} \quad k_2(x) = \underbrace{f(x) - t_1(x) - \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2}_{\to 0 \ (x \to x_0)}$$

Ferner gilt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{k_2(x)}{(x-x_0)^2} = \frac{1}{2} \lim_{x\to x_0} \frac{k_2'(x)}{x-x_0} \overset{a_2 = \frac{1}{2} f''(x_0)}{=} \frac{1}{2} \lim_{x\to x_0} \frac{h(x)}{x-x_0} = 0$$

quadratisches Modell

Insgesamt: $$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + k_2(x)$$

Notizen

mit $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{R_2(x)}{(x-x_0)^2} = 0$, falls f 2 mal diffbar