Buch Kap. 2.6 – Höhere Ableitungen

Definition 2.24: (höhere Ableitungen)

- **Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar auf $A \subseteq D$ und habe die Ableitung $g(x) = f'(x)$. Ist $g : A \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf $B \subseteq A$ mit der Ableitung $g'(x) = (f'(x))'$, dann heißt f zweimal differenzierbar und**

$$f^{(2)}(x) := g'(x) = (f'(x))'$$

heißt zweite Ableitung der Funktion f.

- **Die Differenzierbarkeit der $(n-1)$-ten Ableitung vorausgesetzt, wird analog die n-te Ableitung von f durch**

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$$

rekursiv definiert. Für $f^{(n)}(x)$ wird auch $\frac{d^n f}{d\, x^n}(x)$ geschrieben.

- **Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt n-mal stetig differenzierbar, falls $f^{(n)} : D \to \mathbb{R}$ stetig ist.**

Buch Kap. 2.7 – Lineare Approximation und Differential

Satz 2.12': (Differenzierbarkeit und das lineare Modell)

Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist im Punkt x_0 genau dann differenzierbar, wenn es eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

gilt, bzw. kürzer mit $k(x) = f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{k(x)}{x - x_0} = 0.$$

Die Zahl a stimmt mit der Ableitung $f'(x_0)$ an der Stelle x_0 überein, d.m.

$$a = f'(x_0).$$

Buch Kap. 2.7 – Lineare Approximation und Differential

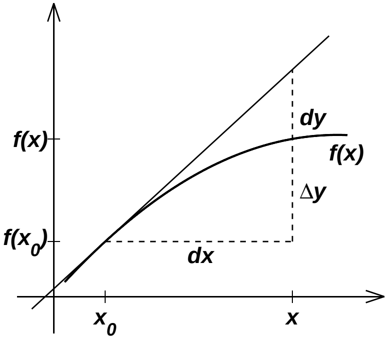

Abbildung 2.32: Funktion und totales Differential *dy*

Buch Kap. 2.7 – Totales Differential

Definition 2.25: (totales Differential)
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar.

$$dy := f'(x_0)(x - x_0)$$

heißt totales Differential von f bei x_0.
Mit $dx = \Delta x = x - x_0$ für den Zuwachs $\Delta x = x - x_0$ wird auch

$$dy = f'(x_0)dx$$

geschrieben.

Satz 2.13: (totales Differential der unabhängigen Variablen)
Für $f(x) = x$ erhält man an der Stelle x_0

$$dy = dx = x - x_0.$$

dx heißt totales Differential der unabhängigen Variablen x. Das totale Differential der unabhängigen Variablen ist gleich ihrem Zuwachs.

Buch Kap. 2.8 – Eigenschaften diffbarer Funktionen

Satz 2.14: (notwendige Bedingung für absoluten Extremwert)

Sei $f : I := [a, b] \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall I definiert und nehme in $x_0 \in I$ einen absoluten Extremwert an (also Maximum oder Minimum). Falls $f'(x_0)$ in den nachfolgenden Fällen (linksseitig/rechtsseitg) existiert, gilt

- **Ist $x_0 \in (a, b)$, so gilt $f'(x_0) = 0$.**
- **Ist $x_0 = a$, so gilt**
  - **$f'(x_0) \leq 0$, falls x_0 Maximalstelle,**
  - **$f'(x_0) \geq 0$, falls x_0 Minimalstelle.**
- **Ist $x_0 = b$, so gilt**
  - **$f'(x_0) \geq 0$, falls x_0 Maximalstelle,**
  - **$f'(x_0) \leq 0$, falls x_0 Minimalstelle.**

Kurz
$f'(x_0)(x - x_0) \geq 0$ für alle $x \in I$ im Fall einer Minimalstelle,
$f'(x_0)(x - x_0) \leq 0$ für alle $x \in I$ im Fall einer Maximalstelle.

Buch Kap. 2.8 – Eigenschaften diffbarer Funktionen

Im Folgenden seien $f, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar.

Satz 2.15: (Satz von Rolle)
Gilt $f(a) = f(b)$, so gibt es mindestens ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$f'(x_0) = 0.$$

Satz 2.16: (Mittelwertsatz)
Es gibt mindestens ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Satz 2.17: (verallgemeinerter Mittelwertsatz)
Es gelte auf (a, b) überall $h'(x) \neq 0$. Dann existiert ein Punkt $x_0 \in]a, b[$ mit

$$\frac{f'(x_0)}{h'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{h(b) - h(a)}$$

Buch Kap. 2.7 – Eigenschaften diffbarer Funktionen

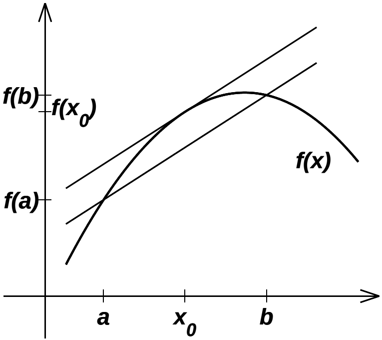

Abbildung 2.34: Sekante und parallele Tangente (Mittelwertsatz)