Analysis handschriftliche Folien

Michael Hinze

Fachbereich Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

15. Dezember 2015

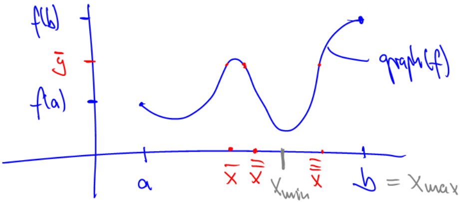
Universität Hamburg

Notizen

Zwischenwertsatz

Folgerung direkt aus dem Nullstellensatz:

$$h(x) := f(x) - \bar{y}$$



$f(\bar{x}) = \bar{y}$, aber auch $f(\bar{\bar{x}}) = \bar{y}$, $f(\bar{\bar{\bar{x}}}) = \bar{y}$

Dann gilt $h(a) = f(a) - \bar{y} < 0$,

$h(b) = f(b) - \bar{y} > 0$, weil $f(a) < \bar{y} < f(b)$.

$$\to \quad h(a) \cdot h(b) < 0 \quad \to \quad \exists\, \bar{x} \in (a,b): \underbrace{h(\bar{x})}_{= f(\bar{x}) - \bar{y}} = 0 \quad \to \quad f(\bar{x}) = \bar{y}.$$

f in Skizze nimmt Maximum bei x_{max} und Minimum bei x_{min} an!

Notizen

Satz von Weierstraß ("DER" Satz im ersten Semester): $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f auf $[a,b]$ ihr Minimum und ihr Maximum an, d.h. es gibt $x_{min}, x_{max} \in [a,b]$ mit

$$f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max}) \quad \forall x \in [a,b]$$

Nachweis: Wir zeigen, dass f beschränkt ist. Damit existieren dann die Zahlen $s := \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ und $i := \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. Betrachte

s: nach Definition gibt es $x_n \in [a,b]$ mit

$$s - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq s \quad \longrightarrow \quad f(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} s$$

$$\text{und} \quad x_{n_k} \underset{BW\,II}{\longrightarrow} \bar{x} \quad (k \to \infty)$$

f stetig $\longrightarrow f(\bar{x}) = s$

Notizen

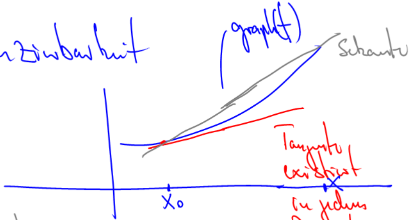
Angenommen

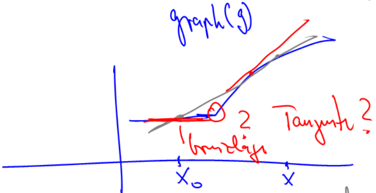
Zeige noch: f beschränkt; (A) f sei nicht beschränkt. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in [a,b]$ mit $f(x_n) > n$. Nach BW II gibt es TF $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_{n_k} \to \tilde{x} \in [a,b]$. f stetig, also

$$f(x_{n_k}) \xrightarrow{k\to\infty} f(\tilde{x}) \in \mathbb{R}.$$

↯ Widerspruch zu $f(x_{n_k}) > n_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty$. ☒

Differenzierbarkeit





Tangente ist Grenzlage von Sekanten durch $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$ für $x \to x_0$

Notizen

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$. f heißt in $x_0 \in D$ differenzierbar, falls

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{bzw} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

existiert. Dann

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Bsp: $f(x) := \cos x$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\frac{\cos(x_0+\Delta x) - \cos x_0}{\Delta x} \overset{\text{Add.Th.}}{=} \frac{\cos x_0 \cos \Delta x - \sin x_0 \sin \Delta x - \cos x_0}{\Delta x}$$

$$= \cos x_0 \underbrace{\frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x}}_{\xrightarrow{\Delta x \to 0} 0} - \sin x_0 \underbrace{\frac{\sin \Delta x}{\Delta x}}_{\xrightarrow{\Delta x \to 0} 1} \xrightarrow{\Delta x \to 0} -\sin x_0$$

weil $1 - \frac{x^2}{2} \le \cos x$

siehe Skizze zum Beweis von $\frac{\sin x}{x} \to 1 \ (x \to 0)$

Notizen

Damit $\cos x_0{}' = -\sin x_0$ "$\cos' = -\sin$"

Analog: "$\sin' = \cos$"

Bsp: $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $f'(x) = n x^{n-1}$, denn

sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann gilt mit

$$(x_0 + \Delta x)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x_0^{n-j} \Delta x^j = \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} x_0^n + \underbrace{\binom{n}{1}}_{n} x_0^{n-1} \Delta x + \sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j} x_0^{n-j} \Delta x^j$$

dass

$$\frac{(x_0 + \Delta x)^n - x_0^n}{\Delta x} = n x_0^{n-1} + \underbrace{\sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j} x_0^{n-j} \Delta x^{j-1}}_{\longrightarrow 0 \ (\Delta x \to 0)} \qquad \binom{n}{j} := \frac{n!}{j!(n-j)!}$$

d.h. $(x_0^n)' = n x_0^{n-1}$ ☒

Notizen

Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit, denn sei f diffbar in x_0, dann gilt

$$f(x)-f(x_0) = \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\to f'(x_0)\ (x\to x_0)} \underbrace{(x-x_0)}_{\to 0\ (x\to x_0)} \longrightarrow 0 \quad (x\to x_0),$$

d.h. $f(x)-f(x_0) \longrightarrow 0 \quad (x\to x_0)$, d.h. f stetig!

Rechenregeln: f und g in x_0 diffbar. Dann

i) $(f\pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

ii) $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0) \quad \forall \lambda\in\mathbb{R}$

iii) $(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ (Produktregel)

iv) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$ Quotientenregel

Notizen

Nachweis iii)

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \frac{(f(x)-f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}$$

$$= \underbrace{g(x)}_{\xrightarrow[x\to x_0]{} g(x_0)} \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\xrightarrow[x\to x_0]{} f'(x_0)} + f(x_0)\underbrace{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}_{\xrightarrow[x\to x_0]{} g'(x_0)} \longrightarrow f'(x_0)g(x)+f(x_0)g'(x_0) \quad (x\to x_0) \quad \boxed{z}$$

Nachweis iv). SgL mit Hilfe von iii).

Bsp Umkehrfunktion: $f(x) = \sin x \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ mit

$f'(x) = \cos x \neq 0$ in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. $g(y) = \arcsin y$ Umkehrfunktion.

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} \overset{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}{=} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Analysis handschriftliche Folien

Michael Hinze

Fachbereich Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

17. Dezember 2015

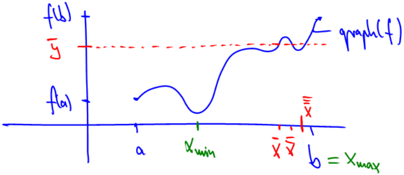
Notizen

Zwischenwertsatz:

$\hat{=}$ Nullstellensatz für

$h(x) := f(x) - \bar{y}$,

dann $h(\bar{x}) = 0 \iff f(\bar{x}) = \bar{y}$



$f(\bar{x}) = \bar{y}$, aber auch

$f(\bar{\bar{x}}) = \bar{y}$ und $f(\bar{\bar{\bar{x}}}) = \bar{y}$

Satz von Weierstraß $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

i) f beschränkt

ii) $\exists\, x_{min}, x_{max} \in [a,b]$: $f(x_{min}) = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$, $f(x_{max}) = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$

Notizen

Nachweis i.) f beschränkt, denn falls nicht, gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in [a,b]$ mit $f(x_n) > n$. Wir wissen: $(x_n) \subset [a,b]$, also beschränkt. Damit gibt es nach BW II eine TF $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$x_{n_k} \to \bar{x} \in [a,b] \quad \text{für } k \to \infty$$

f stetig $\Rightarrow$ $f(x_{n_k}) \to \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{f(\bar{x})}}$ $(k \to \infty)$ ↯ Widerspruch

ii) Zeige: es gibt x_{min} und x_{max} mit $f(x_{min}) = i := \inf_{x \in [a,b]} f(x)$ und $f(x_{max}) = s := \sup_{x \in [a,b]} f(x)$. Hier nur x_{max}

Nach Definition von s gibt es Zahlen $x_n \in [a,b]$ mit $s - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq s$

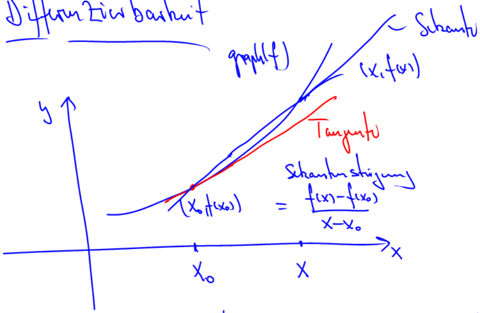
$\rightarrow$ $f(x_n) \to s$ $(n \to \infty)$. Ferner $(x_n) \subset [a,b]$, also nach BW II:

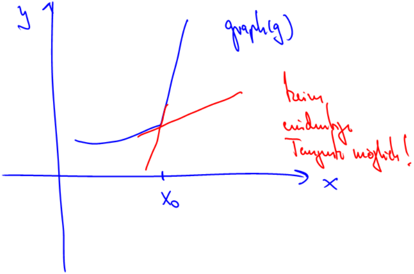
$x_{n_k} \xrightarrow{k \to \infty} \bar{x} \in [a,b]$ $\Rightarrow$ $f(x_{n_k}) \xrightarrow{k \to \infty} f(\bar{x})$. Es gilt aber auch

Notizen

$f(x_{n_k}) \to s \quad (k \to \infty)$. Insgesamt $f(\bar{x}) = s$. Setze $x_{max} := \bar{x}$ $\boxtimes$

Differenzierbarkeit





Steigung der Tangente ergibt als Grenzwert von Sekantensteigungen von Sekanten durch $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$

Notizen

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{bzw} \quad f'(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

falls diese Grenzwerte existieren.

Bsp 1: $f(x) = \cos x$

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\cos(x_0+\Delta x) - \cos x_0}{\Delta x}$$

Add. Theorem

$$= \frac{\cos x_0 \cos \Delta x - \sin x_0 \sin \Delta x - \cos x_0}{\Delta x} = \cos x_0 \underbrace{\frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x}}_{\to 0 \text{ für } \Delta x \to 0} - \sin x_0 \underbrace{\frac{\sin \Delta x}{\Delta x}}_{\to 1 \text{ für } \Delta x \to 0}$$

Nachweis ähnlich zu Überlegung von $\frac{\sin x}{x} \to 1$ $(x \to 0)$, beachte $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$

$$\to -\sin x_0 \quad (\Delta x \to 0)$$

d.h. $\cos' x_0 = -\sin x_0$.

Analog: $\sin' x_0 = \cos x_0$

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!\,(n-j)!}$$

Notizen

Bsp 2: $f(x) = x^n \quad f'(x) = n\,x^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N})$, denn

$$\frac{(x_0+\Delta x)^n - x_0^n}{\Delta x} \overset{\text{Bin. Formel}}{=} \frac{\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x_0^{n-j}\,\Delta x^j - x_0^n}{\Delta x} = \frac{\binom{n}{0}x_0^n + \binom{n}{1}x_0^{n-1}\Delta x + \sum_{j=2}^{n}\binom{n}{j}x_0^{n-j}\Delta x^j - x_0^n}{\Delta x}$$

$$\overset{\binom{n}{0}=1,\ \binom{n}{1}=n}{=} n\,x_0^{n-1} + \underbrace{\sum_{j=2}^{n}\binom{n}{j}x_0^{n-j}\,\Delta x^{j-1}}_{\to 0\ (\Delta x \to 0)} \longrightarrow n\,x_0^{n-1} \quad (\Delta x \to 0).$$

Eigenschaften diffbarer Funktionen

1) f diffbar $\to$ f stetig, denn

$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\xrightarrow{x\to x_0} f'(x_0)} \underbrace{(x-x_0)}_{\to 0\ (x\to x_0)} \longrightarrow 0 \quad (x \to x_0),$$ d.h. f stetig in x_0.

Notizen

Weitere Eigenschaften

ii) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$ iii) $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$

iv) $(f \cdot g)'(x) = f'(x)\, g(x) + g'(x)\, f(x)$ v.) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$

vi) $(f(g(x)))' = f'(g(x))\, g'(x)$

vii) $(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}$, f^{-1} Umkehrfunktion zu f

Nachweis: ii), iii) ✓ zu iv.) schreibe

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\xrightarrow[x\to x_0]{} f'(x_0)} \underbrace{g(x)}_{\xrightarrow[x\to x_0]{} g(x_0)} + f(x_0)\underbrace{\frac{(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}}_{\xrightarrow[x\to x_0]{} g'(x_0)}$$

$$\longrightarrow f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0) \qquad \blacksquare$$

Notizen

v.) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) \overset{\text{iv)}}{=} f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

Was ist $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)$?

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{g(x_0) - g(x)}{(x-x_0)\, g(x)\, g(x_0)} = -\underbrace{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}_{\xrightarrow{x\to x_0} g'(x_0)} \underbrace{\frac{1}{g(x)\, g(x_0)}}_{\xrightarrow[x\to x_0]{} g(x_0)^2} \to -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Beispiele

a) $(x \sin x)' = \sin x + x \cos x$ $f(x) = x$, $g(x) = \sin x$

Kettenregel

b) $f'(x) = (x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x}(x \ln x)' = x^x\left(\ln x + x \frac{1}{x}\right)$
$= x^x(1 + \ln x)$

c.) $f(x) = \arcsin x$. Dann $f(x) = g^{-1}(x)$, wobei $g(y) = \sin y$

$f'(x) = (\arcsin x)' = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} \overset{y = \arcsin x}{=} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.