Analysis handschriftliche Folien

Michael Hinze

Fachbereich Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

8. Dezember 2015

Notizen

$\varepsilon - \delta$ Definition von Stetigkeit

Erinnerung: $f: D \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $x_0 \in D$, falls für jede Folge $(x_n) \subset D$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ schon $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ gilt.

Was heißt "$x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$" $\quad \forall_{\delta>0} \, \exists_{n_0(\varepsilon)} \, \forall_{n \geq n_0}: |x_n - x_0| < \delta$

"$f(x_n) \to f(x_0)$" $\quad \forall_{\varepsilon>0} \, \exists_{n_0(\varepsilon)} \, \forall_{n \geq n_0}: |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$

Dies motiviert die $\varepsilon - \delta$ Definition der Stetigkeit von f in $x_0 \in D(f)$

$$\forall_{\varepsilon>0} \, \exists_{\delta = \delta(\varepsilon, x_0)} \, \forall_{\substack{x \in B_\delta(x_0), \\ x \in D}} : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Dabei $B_\delta(x_0) := \{x \in \mathbb{R} \,;\, |x - x_0| < \delta\}$ offene δ-Kugel um x_0.

Notizen

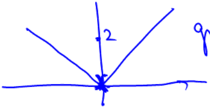
<u>Praxis:</u> Folgendefinition von Stetigkeit einfacher handhabbar.

<u>Bsp</u>: $f(x) = \sqrt{x}$. Dann ist f stetig auf $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, denn

Sei $x_0 \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ und $\lim x_n = x$, so gilt $\lim x_n^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}$.

Unstetigkeit – Möglichkeiten

i.) $f(x) := \begin{cases} |x|, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$



graph(f)

nicht stetig in $x_0 = 0$, weil mit $x_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$

$= \lim\limits_{n \to \infty} |x_n| = 0 \neq 2.$

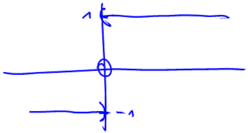
Notizen

Die Stelle $x_0 = 0$ heißt "hebbare Unstetigkeitsstelle", denn durch die Festlegung

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \equiv |x| \quad (x \in \mathbb{R})$$

erhalten wir eine stetige Funktion.

ii) $$f(x) := \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$



ist unstetig in $x_0 = 0$ (nicht hebbar)

iii) $$f(x) := \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

ist stetig in $x_0 = 0$, weil

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Weiter auf Beamerfolien

Notizen

Eigenschaften stetiger Funktionen

Seien f und g stetig in x_0. Dann sind auch

a) $f+g$, b) $f-g$, c) $f\cdot g$ und d) $\frac{f}{g}$ (für $g(x_0)\neq 0$) stetig in x_0

a), b), c) folgen direkt aus Grenzwertsätzen für Folgen.

Bei d) beachte, dass mit $g(x_0)\neq 0$ eine Umgebung von (ein Ball um) x_0 existiert, s.d. $g(x)\neq 0$ $\forall x \in$ Umgebung $= B_\delta(x_0)$

<u>Hilfe</u>: Ist $g(x_0)\neq 0$ und g stetig in x_0, so ist $g(x)\neq 0$ „in der Nähe" von x_0, denn

g stetig und $\varepsilon := |g(x_0)| > 0$. Dann gibt es $\delta > 0$: $|g(x)-g(x_0)| < |g(x_0)|$ für alle $x \in B_\delta(x_0)$.

Notizen

Damit

$$|g(x_0)| - |g(x)| \le \big| |g(x_0)| - |g(x)| \big| \le |g(x_0) - g(x)| < |g(x_0)|$$

$$\Longrightarrow \quad -|g(x)| < 0 \quad \text{bzw} \quad |g(x)| > 0 \quad \forall x \in B_\delta(x_0),$$

d.h. $g(x) \neq 0$ in $B_\delta(x_0)$ (≙ „Nähe von x_0")

Komposition (= Verkettung) von Funktionen:

f stetig in x_0 und g sei stetig in $f(x_0)$. Dann ist $g \circ f$ stetig in x_0, denn mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$ gilt $\underbrace{f(x_n)}_{=:a_n} \xrightarrow{n\to\infty} \underbrace{f(x_0)}_{=:a}$,

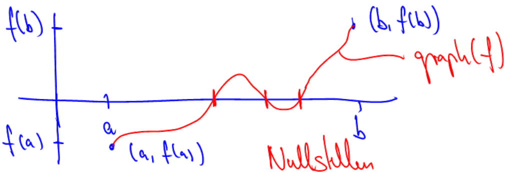
also auch $g(\underbrace{f(x_n)}_{a_n}) \xrightarrow{n\to\infty} g(\underbrace{f(x_0)}_{a})$

Notizen

Wichtige Sätze über stetige Funktionen

1.) Nullstellensatz: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig und es gelte $f(a) \cdot f(b) < 0$. Dann besitzt f in (a,b) eine Nullstelle $\bar{x}$, d.h. $\bar{x} \in (a,b)$ mit $f(\bar{x}) = 0$

Graphisch:



Nachweis mittels Intervallschachtelung:

Notizen

① Initialisierung : $a_0 := a$, $b_0 := b$ $i := 0$

② Iteration : Solange $|a_i - b_i| > 0$ führe durch

i.) $m := \frac{a_i + b_i}{2}$

ii) Falls $f(m) \cdot f(a_i) < 0$: $a_{i+1} := a_i$, $b_{i+1} := m$

Falls $f(m) \cdot f(a_i) > 0$: $a_{i+1} := m$, $b_{i+1} := b_i$

Falls $f(m) = 0$: Stop mit Ausgabe $\bar{x} = m$

iii) $i = i+1$, gehe zu i.)

③ Gebe (a_i), (b_i) und m aus , setze $\bar{x} := m$

Ähnlich wie Beweis von Bolzano Weierstraß:

Notizen

(a_i) monoton wachsend und beschränkt $\rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \bar{x} \in [a,b]$

(b_i) " fallend " " $\rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \tilde{x} \in [a,b]$

Ferner $b_i - a_i = \underbrace{\frac{1}{2^i}(b_0 - a_0)}_{\to 0 \ (i \to \infty)}$ $i \in \mathbb{N}$

$i\to\infty$: $b_i \downarrow \tilde{x}$, $a_i \downarrow \bar{x}$ $\Rightarrow \tilde{x} = \bar{x}$!

f stetig und $f(a_i) \leq 0 \ \forall i \in \mathbb{N}$, sowie $f(b_i) \geq 0 \ \forall_{i \in \mathbb{N}}$

$\rightarrow f(\bar{x}) = \lim\limits_{i\to\infty} f(a_i) \leq 0$ und $f(\bar{x}) = \lim\limits_{i\to\infty} f(b_i) \geq 0$

$\rightarrow f(\bar{x}) \leq 0$ und $f(\bar{x}) \geq 0 \Rightarrow f(\bar{x}) = 0$!

Analysis handschriftliche Folien

Michael Hinze

Fachbereich Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

10. Dezember 2015

Notizen

$\varepsilon-\delta$ Definition der Stetigkeit

Motivation: f heißt stetig in $x_0 \in D(f)$, falls für jede Folge $(x_n) \subset D(f)$ mit $x_n \to x_0$ schon $f(x_n) \to f(x_0)$ gilt (jeweils für $n \to \infty$)

D.h.: Ist x_n "in der Nähe" von x_0, so induziert dies, dass $f(x_n)$ "in der Nähe" von $f(x_0)$ ist. In der Sprache Mathematik

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\substack{\delta>0 \\ \delta=\delta(x_0)}}\ \forall_{x \in B_\delta(x_0) \cap D(f)} : |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$$

$\varepsilon-\delta$ Definition Stetigkeit

Notizen

Dabei $B_\delta(x_0) := \{x \in \mathbb{R};\ |x - x_0| < \delta\}$ offene Kugel um x_0 mit Radius $\delta > 0$.

<u>Bsp</u>: $f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig in $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Mit ε-δ Kriterium: $|x - x_0| < \delta \overset{!}{\Longrightarrow} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right|$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Es soll $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| \overset{!}{<} \varepsilon$. Wie ist $\delta > 0$ zu wählen?

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \frac{|x_0 - x|}{|x||x_0|} \underset{\Rightarrow |x| > |x_0| - \delta}{\overset{|x - x_0| < \delta}{\leq}} \frac{|x_0 - x|}{(|x_0| - \delta)|x_0|} < \frac{\delta}{(|x_0| - \delta)|x_0|} \overset{!}{=} \varepsilon .$$

Damit ist $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon$, falls $|x - x_0| < \delta$ mit $\delta = \frac{\varepsilon |x_0|^2}{1 + \varepsilon |x_0|}$, denn

Notizen

$$\delta = \varepsilon\,(|x_0| - \delta)\,|x_0| \longrightarrow \delta = \frac{\varepsilon |x_0|^2}{1 + \varepsilon |x_0|}$$

Damit induziert $|x - x_0| < \delta$, dass $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon$

<u>Bsp</u>: $f(x) := \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ ist stetig in $x_0 = 0$,

denn $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ (s. VL 7) und $f(0) = 1$

<u>Unstetigkeit</u>: Siehe Beamerfolien

Notizen

Eigenschaften von stetigen Funktionen

f und g stetig in x_0, so auch

$f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ und $\frac{f}{g}$ (falls $g(x_0) \neq 0$)

Für $\frac{f}{g}$ wird benötigt, dass $g(x_0) \neq 0$ impliziert, dass $g(x) \neq 0$ in $B_\delta(x_0)$ mit $\delta > 0$ geeignet.

<u>Aussage</u>: Ist $g(x_0) \neq 0$ und g stetig in x_0, so gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass $g(x) \neq 0$ in $B_\delta(x_0)$, denn sei $\varepsilon := |g(x_0)|$. Dann gibt es $\delta > 0$ mit

Notizen

$|g(x)-g(x_0)| < \varepsilon = |g(x_0)|$ für alle x mit $|x-x_0|<\delta$

Damit gilt

$$|g(x_0)|-|g(x)| \overset{\Delta\text{-Ungleichung}}{\leq} |g(x_0)-g(x)| < |g(x_0)|$$

$$\Longrightarrow \quad -|g(x)| < 0, \text{ d.h. } |g(x)|>0, \text{ d.h. } g(x)\neq 0$$

$\boxtimes$

<u>Note</u>: Komposition von stetigen Funktionen ist stetig

$x_n \to x_0 \implies f(x_n) \to f(x_0)$ weil f stetig in x_0

$a_n \to a \implies g(a_n) \to g(a)$ weil g stetig in $a := f(x_0)$

mit $a_n := f(x_n)$ und $a := f(x_0)$ gilt: $x_n \to x_0 \Rightarrow g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$.

Notizen

Hauptsatz für stetige Funktionen: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und $f(a)\cdot f(b)<0$, d.h. $f(a)$ und $f(b)$ haben verschiedene Vorzeichen. Dann besitzt in (a,b) mindestens eine Nullstelle.

Nachweis konstruktiv

① $a_0:=a$, $b_0:=b$, $i:=0$

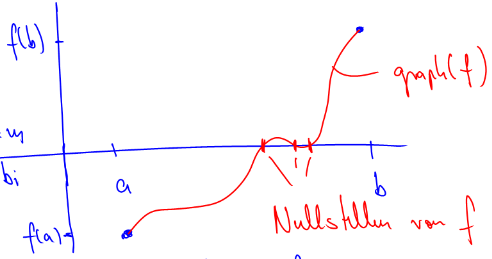
② i) $m:=\frac{1}{2}(a_i+b_i)$

ii) Falls $f(m)f(a_i)<0$: $a_{i+1}:=a_i$, $b_{i+1}:=m$

Falls $f(m)\cdot f(a_i)>0$: $a_{i+1}:=m$, $b_{i+1}:=b_i$

Falls $f(m)=0$: gebe $\bar{x}:=m$ aus

iii) $i=i+1$, gehe zu i)



③ gebe (a_i), (b_i) und $\bar{x}$ aus; es gilt dann $f(\bar{x})=0$.

Notizen

In diesem Algorithmus gilt: (a_i) monoton steigend und beschränkt!
(b_i) monoton fallend und beschränkt!

BWI $\Rightarrow$ $a_i - b_i = -2^{-i}|a-b| \longrightarrow 0 \quad i \to \infty$

$a_i \xrightarrow{i\to\infty} \bar{x}$, $\quad b_i \xrightarrow{i\to\infty} \tilde{x}$

$\Longrightarrow \tilde{x} = \bar{x}$

Damit gilt, weil f stetig: $\underbrace{f(a_i)}_{<0} \xrightarrow{i\to\infty} f(\bar{x}) \leq 0$ und

$\underbrace{f(b_i)}_{>0} \xrightarrow{i\to\infty} f(\bar{x}) \geq 0$

falls $f(a) < 0$, $f(b) > 0$

d.h. $f(\bar{x}) \geq 0$ und $f(\bar{x}) \leq 0 \Longrightarrow f(\bar{x}) = 0$, d.h. $\bar{x}$ Nullstelle $\boxtimes$