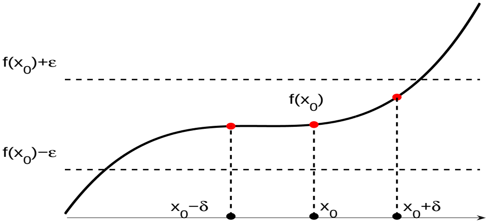
Buch Kap. 2.4 – Stetigkeit von Funktionen mit $\epsilon - \delta$

Satz 2.5:(Stetigkeit in einem Punkt x_0)
Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig im Punkt $x_0 \in D$, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$x \in D \wedge |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

gilt, oder kürzer

$$x \in U_\delta(x_0) \cap D \Longrightarrow f(x) \in U_\epsilon(f(x_0)).$$



Buch Kap. 2.5 – Rechenregeln für stetige Funktionen

Sind f und g stetig im Punkt x_0, so sind auch

$$f + g, \quad f - g, \quad f \cdot g \quad \text{und} \quad \frac{f}{g} \quad (\text{falls} \;\; g(x_0) \neq 0)$$

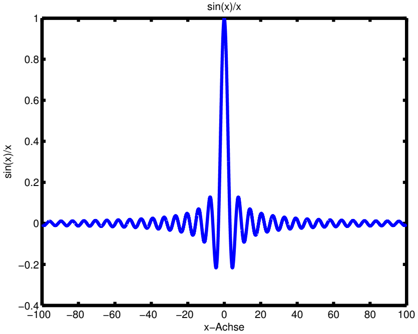
stetig in x_0.

Buch Kap. 2.5 – Verkettung stetiger Funktionen

Satz 2.8: (Verkettung stetiger Funktionen)

- **Wenn $f : A \to B$ in x_0 stetig ist, und $g : B \to C$ in $f(x_0)$ stetig ist, dann ist die verkettete Funktion $(g \circ f)(x) = g(f(x)) : A \to C$ stetig in x_0.**
- **Elementare Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ sind auf jedem Intervall $I \subset D$ stetig. Dabei bezeichnet D den jeweiligen Definitionsbereich der elementaren Funktion, siehe Kap 2.3.**
- **Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine streng monotone und stetige Funktion und I ein Intervall, dann ist die Umkehrfunktion f^{-1} stetig auf $D = f(I)$.**

Buch Kap. 2.4 – Hebbare Unstetigkeit



Hebbare Unstetigkeitsstelle der Funktion $f(x) := \frac{\sin x}{x}$ bei $x = 0$. Diese Funktion kann stetig nach $x = 0$ fortgesetzt werden.

Buch Kap. 2.4 – Hebbare Unstetigkeit

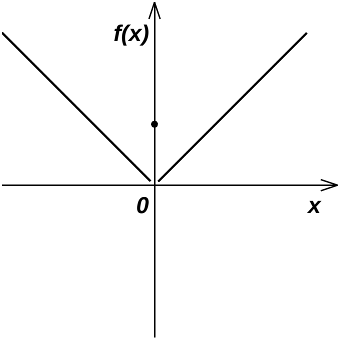


Abbildung 2.23: Hebbare Unstetigkeitsstelle der Funktion

$$f(x) := \begin{cases} |x| & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases} \quad \textbf{bei } x = 0$$

Buch Kap. 2.4 – Unstetigkeit 1. Art

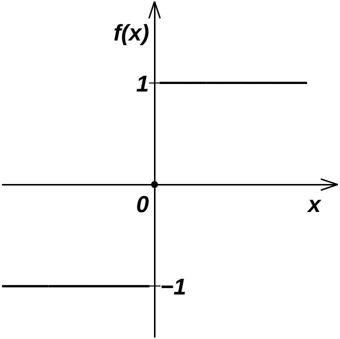


Abbildung 2.24: Unstetigkeitsstelle 1. Art der Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \frac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \text{bei } x = 0$$

Buch Kap. 2.4 – Unstetigkeit 2ter Art

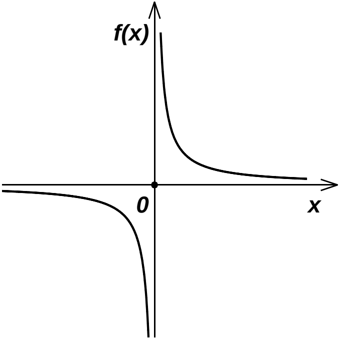


Abbildung 2.25: Unstetigkeitsstelle 2. Art der Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \text{bei } x = 0$$

Buch Kap. 2.4 – Oszillatorische Unstetigkeit

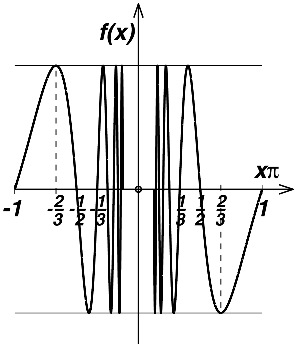


Abbildung 2.26: Oszillatorische Unstetigkeit der Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \text{bei } x = 0$$

Buch Kap. 2.5 – Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 2.6: (Nullstellensatz) Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und haben $f(a)$ und $f(b)$ unterschiedliche Vorzeichen, d.h $f(a) \cdot f(b) < 0$, so besitzt f in (a, b) mindestens eine Nullstelle.

Nachweis von Satz 2.6 $\to$ Intervallschachtelung:

1. $a_0 = a$, $b_0 = b$, $i = 0$ (Initialisierung)
2. Solange $|a_i - b_i| > 0$ führe aus
   - i) $m = \frac{a_i + b_i}{2}$
   - ii) Falls $f(m) \cdot f(a_i) < 0$: $a_{i+1} = a_i$, $b_{i+1} = m$
     falls $f(m) \cdot f(a_i) > 0$: $a_{i+1} = m$, $b_{i+1} = b_i$
     falls $f(m) = 0$: m Nullstelle $\to$ STOP, gebe m aus.
   - iii) $i = i + 1$
3. Ausgabe von a_i, b_i und m.