Analysis handschriftliche Folien

Michael Hinze

Fachbereich Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

17. November 2015

Notizen

Zahlenfolgen

Bsp 1.) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto f(n) =: a_n$ $a_n := \frac{1}{n}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \equiv \left(\frac{1}{n}\right)$

2) $a_n := \sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}}$, Folge $\left(n^{\frac{1}{n}}\right)$

3) $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

4) $s_n := \sum_{j=0}^{n} b_j$ mit z.Bsp. $b_j := \frac{1}{j!}$

$(s_n)_{n\in\mathbb{N}} =: \sum_{j=0}^{\infty} b_j$ $= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}$

Folge von Partialsummen und heißt „Reihe“

Notizen

Konvergenz von Folgen

Frage: Was "macht" a_n, wenn n immer größer wird?

Bsp $a_n := \frac{1}{n}$. Dann $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots)$

Vermutung: $a_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[\text{gegen}]{\text{strebt}} 0$ falls $n \longrightarrow \infty$

Formalisierung der Konvergenz

Wie groß muß ich n_0 wählen, damit etwa

$\frac{1}{n} < 0.01$ für alle $n \geq n_0$ erfüllt ist?

Hw $\frac{1}{n} \overset{!}{<} \frac{1}{100}$, d.h. $n > 100$, also $n_0 = 101$

Notizen

Idee: Ersetze 0.01 durch eine beliebige andere kleine Zahl $\varepsilon > 0$ und frage, ob $\frac{1}{n}$ im Intervall $[0, \varepsilon)$ Platz findet und falls, für welche $n \in \mathbb{N}$.

Def. (a_n) Nullfolge (NF) $:\overset{\text{gdw}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall_{\varepsilon > 0} \, \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \, \forall_{\substack{n \geq n_0, \\ n \in \mathbb{N}}} : |a_n| < \varepsilon$

Zurück zu $a_n = \frac{1}{n}$:

Sei $\varepsilon > 0$. Fordern $|a_n| \overset{!}{<} \varepsilon$, d.h. $\underbrace{\frac{1}{n} \overset{!}{<} \varepsilon}$ für $n \geq n_0$

$\Longleftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$

entier Funktion

Wähle $n_0 := 1 + \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil :=$ kleinste Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq \frac{1}{\varepsilon}$

Aufrundungsfunktion

Also $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

Notizen

Bsp 2 $\quad a_n := q^n$ mit $q \in (-1, 1)$

Beh.: $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$

$q \equiv 0$ ist evident

" $\varepsilon > 0$ vorgeben
n_0 bestimmen "

Zeige: $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{\substack{n \geq n_0 \\ n \in \mathbb{N}}} : |q^n| < \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$. Überprüfe $|q|^n < \varepsilon \quad : \ln$

Logarithmen sind streng monoton steigend!

$\underbrace{\ln(|q|^n)} < \ln \varepsilon$

$n \ln|q| < \ln \varepsilon$

$n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln|q|} \qquad q \neq 0$

Ohne Einschränkung sei $\varepsilon \leq 1$. Dann $n_0 := \left\lceil \frac{\ln \varepsilon}{\ln|q|} \right\rceil + 1$

Notizen

Nachweis ohne Logarithmus $\rightsquigarrow$ SgL (selbstgesteuertes Lernen)

Einige Eigenschaften konvergenter Folgen

1.) $a_n \longrightarrow 0 \ (n\to\infty)$ und $|b_n| \le |a_n| \ \forall n\in\mathbb{N}$

$\longrightarrow (b_n)$ NF,

weil mit $|a_n| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$ auch $|b_n| \le |a_n| < \varepsilon \ \forall n\geq n_0$.

2.) (a_n) NF und (b_n) beschränkt, d.h. $\alpha \le b_n \le \beta \ \forall n\in\mathbb{N}$

mit $-\infty < \alpha \le \beta < +\infty$.

Dann $(a_n b_n)$ NF, denn zu $M := \max\{|\alpha|, |\beta|\}$ und $n_0\in\mathbb{N}$

so, dass $|a_n| < \frac{\varepsilon}{M} \ \forall n\geq n_0$. Dann

Notizen

$$|a_n b_n| = |a_n|\,|b_n| < \frac{\varepsilon}{M}|b_n| \leq \frac{\varepsilon}{M}\max\{|\alpha|,|\beta|\} = \frac{\varepsilon}{M}\cdot M = \varepsilon,\ n \geq n_0$$

d.h. $(a_n b_n)$ NF.

3.) (a_n) NF, dann $(a_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $k \in \mathbb{N}$ fix.

Nachweis: (a_n) NF, dann (a_n) beschränkt (warum?), also auch (a_n^{k-1}) beschränkt. Damit nach 2.)

$$(a_n^k)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n \underbrace{a_n^{k-1}}_{\text{beschränkt}})_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{NF}$$

Notizen

Beispiel zu Bolzano Weierstraß: Jede monotone, beschränkte Folge konvergiert.

Sei $a_0 := 1$, $a_{k+1} := \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{2}{a_k}\right)$ $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

rekursiv definierte Folge.

Beh.: $\lim_{k \to \infty} a_k = \sqrt{2}$

Dazu zeigen wir i.) $a_k \geq \sqrt{2}$ $\forall k$

ii) $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ monoton fallend

Dann gilt nach Bolzano Weierstraß: $\lim_{k \to \infty} a_k = a \geq \sqrt{2}$ existiert

Notizen

und es gilt

$$a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{2}{a_k}\right) \longrightarrow a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$$

$$k\to\infty \downarrow \qquad \underbrace{\phantom{\frac{1}{2}\left(a_k + \frac{2}{a_k}\right)}} $$

$$a \qquad \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) \qquad \text{d.h.} \quad a = \sqrt{2}$$

Zeige noch: $a_k \geq \sqrt{2} \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Dies folgt aus

$$a_k a_{k+1} = \frac{1}{2}(a_k^2 + 1)$$

$$\Longrightarrow \quad a_k(a_{k+1} - \sqrt{2}) = \frac{1}{2}(a_k - \sqrt{2})^2 \geq 0$$

$$\xrightarrow{\text{vollst. Induktion}} \quad a_k \geq \sqrt{2} \quad \forall k$$

Notizen

Ferner gilt $a_{k+1} \leq a_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$, denn

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{2}{\underbrace{a_k^2}_{\geq 2}}\Big) \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad a_{k+1} \leq a_k,$$

also (a_k) monoton fallend.

Analysis handschriftliche Folien

Michael Hinze

Fachbereich Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

19. November 2015

Notizen

Folgen $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$n \mapsto f(n) =: a_n$

Damit ist der Wertebereich von f gegeben durch $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots) =: (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Notation: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \equiv (a_n)$

Bsp

i) $a_n := \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ $\quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$

ii) $a_n := \sqrt[n]{n}$, $n \in \mathbb{N}$ $\quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \ldots)$

iii) $a_n := (1+\frac{1}{n})^n$, $n \in \mathbb{N}$ $\quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} =$ sgL

iv) $s_n := \sum_{j=0}^{n} b_j$, $n \in \mathbb{N}$ und $b_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge der Partialsummen s_n und heißt Reihe

Notizen

Notation: $(s_n) =: \sum_{j=0}^{\infty} b_j$

v.) Rekursiv bzw induktiv definierte Folge

$a_0 := 1$, $a_{k+1} := \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{2}{a_k}\right)$ für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Wir werden später nachweisen: $a_k \xrightarrow{k\to\infty} \sqrt{2}$

Konvergenz: Notation $\lim_{n\to\infty} a_n = \sigma$ gdw $\lim a_n = 0$ gdw

$a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ gdw $a_n \to 0$ $(n\to\infty)$

Beispiele zu Nullfolgen

i.) $a_n := \frac{1}{n}$. Dann $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ Nullfolge (NF).

Notizen

Frage: Wie groß muß n gewählt werden, damit $|a_n| = \frac{1}{n}$ kleiner ist als 0.01 (oder als 0.125 oder als 0.0068 oder als ...)

$\frac{1}{n} < 0.01 \iff n > 100$, d.h. für $n \geq n_0 := 101$ gilt $|a_n| < 0.01$

Formal: $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{\substack{n \geq n_0 \\ n \in \mathbb{N}}} : |a_n| < \varepsilon$

Dann heißt (a_n) NF

Hier: $|a_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$, d.h.

$n_0 = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1$. Dabei $\left.\begin{matrix}\lceil x \rceil \\ \lfloor x \rfloor\end{matrix}\right\} := \begin{cases} \text{kleinste natürliche Zahl größer gleich } x \\ \text{größte natürliche Zahl kleiner gleich } x \end{cases}$

Notizen

$\lceil\ \rceil$ Aufrundungs-, $\lfloor\ \rfloor$ Abrundungsfunktion. Gaußklammer-Funktion,

$\lceil\sqrt{2}\rceil = 2$, $\lfloor\sqrt{2}\rfloor = 1$

<u>Bsp 2</u> $a_n := q^n$, $q \in (-1,1)$. Dann gilt $\lim a_n = 0$.

<u>Nachweis</u>: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Bestimme n_0 aus

$|a_n| = |q^n| = |q|^n < \varepsilon \quad | \ln$

$\ln |q|^n = n \ln|q| < \ln \varepsilon$ wohl $\ln$ monoton

$\Leftrightarrow \quad n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln|q|}$

$\Rightarrow \quad n_0 = \left\lceil \frac{\ln \varepsilon}{\ln|q|} \right\rceil + 1$

<u>für $q \neq 0$</u>

$q = 0$, dann $a_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$!

Notizen

Eigenschaften von Folgen und Grenzwerten

i) Sei (a_n) NF und (b_n) beschränkt. Dann ist $(a_n b_n)$ NF, denn

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_n| < \frac{\varepsilon}{M}$ $\forall n \geq n_0$,

wobei M so gewählt ist, dass $|b_n| \leq M$ gilt. Damit folgt

$$|a_n b_n| = |a_n| \, |b_n| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon \quad \forall n \geq n_0, \text{ d.h. } (a_n b_n) \text{ NF}$$

ii) Sei (a_n) NF, dann auch $(a_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ für $k \in \mathbb{N}$ beliebig aber fix

wie NF, denn

$$a_n^k = a_n \cdot \underbrace{a_n \cdot \ldots \cdot a_n}_{k-1 \text{ mal}} =: a_n b_n \quad \text{mit } b_n = a_n^{k-1}$$

Notizen

Wir wissen, dass dann (b_n) beschränkt ist (hör mündliche Erläuterung)
Damit $|b_n| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $M > 0$ geeignet, also

$|a_n^k| = |a_n|\,|b_n| < \varepsilon$, falls $n \geq n_0$ mit n_0 aus

$|a_n| < \frac{\varepsilon}{M}$ $\forall n \geq n_0$.

Bolzano-Weierstraß: (a_n) beschränkt und monoton, dann gilt
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, d.h. (a_n) konvergent!

Bsp.: Bsp v.) wiederbesucht; $a_0 := 1$, $a_{k+1} := \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{2}{a_k}\right)$
für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dann gilt $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \sqrt{2}$

Notizen

Wir zeigen

i) $a_k \geq \sqrt{2} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

ii) $a_{k+1} \leq a_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{i)} \\ \text{ii)} \end{array}\right\} \longrightarrow \lim a_k = a$$

und es gilt $a = \sqrt{2}$, weil

$$a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{2}{a_k}\right)$$

$$k \to \infty \downarrow \qquad \downarrow k \to \infty$$

$$a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$$

$$\longrightarrow a = \sqrt{2}$$

Nachweis i) Es gilt

$$a_k a_{k+1} = \frac{1}{2}(a_k^2 + 2) \quad \text{(nachrechnen)}$$

Damit ergibt sich

$$a_k(a_{k+1} - \sqrt{2}) = \frac{1}{2}(a_k - \sqrt{2})^2 \geq 0$$

Notizen

Damit folgt induktiv $a_k \geq \sqrt{2}$

ii) $a_{k+1} < a_k$, weil $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{2}\Big(1 + \underbrace{\frac{2}{a_k^2}}_{\geq 2}\Big) \leq 1$

$\longrightarrow \quad a_{k+1} \leq a_k$