Buch Kap. 1.7 – Komplexe Zahlen $\rightarrow$ Motivation

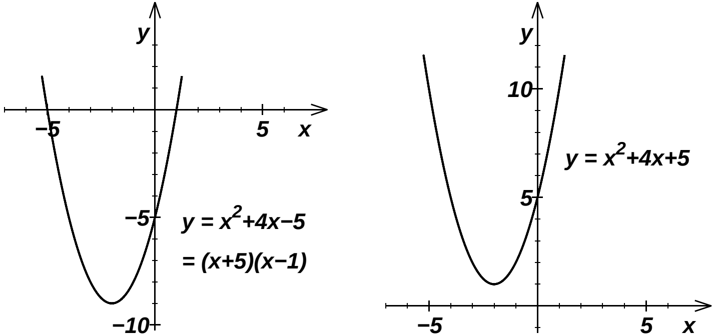


Abb. 1.22: Quadratische Gleichungen mit und ohne Lösungen in $\mathbb{R}$

Erweiterung von $\mathbb{R}$ notwendig $\rightarrow$ Komplexe Zahlen.

Buch Kap. 1.7 – Komplexe Zahlen

Wir wollen einen Zahlenkörper definieren, in dem jedes Polynom eine Nullstelle besitzt.
Betrachte etwa $x^2 + 4x + 5 = 0$. Mit der $p - q$ Formel ergibt sich

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{-1}.$$

Was ist $\sqrt{-1}$?

1) **Unter einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ versteht man einen Ausdruck der Form**

$$z := a + b\,i \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

$a \in \mathbb{R}$ heißt Realteil von z : $\quad a =: Re\, z$, $b \in \mathbb{R}$ heißt Imaginärteil von z : $\quad b =: Im\, z$ und i imaginäre Einheit.

2) **Zwei komplexe Zahlen sind gleich, wenn sowohl die Realteile als auch die Imaginärteile übereinstimmen. Insbesondere ist**

$$a + bi = 0 \iff a = 0 \wedge b = 0\ .$$

3) **Ist $z = a + b\,i$, so heißt $\bar{z} = a - b\,i$ die zu z konjugiert komplexe Zahl und $|z|^2 := z\bar{z}$ Betrag von z.**

Buch Kap. 1.7 – Komplexe Zahlen

Wir statten die komplexen Zahlen mit einer Addition und einer Multiplikation wie folgt aus:
Addition/Subtraktion:

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2) i$$

Multiplikation:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

Division (Voraussetzung $z_2 = a_2 + b_2 i \neq 0$):

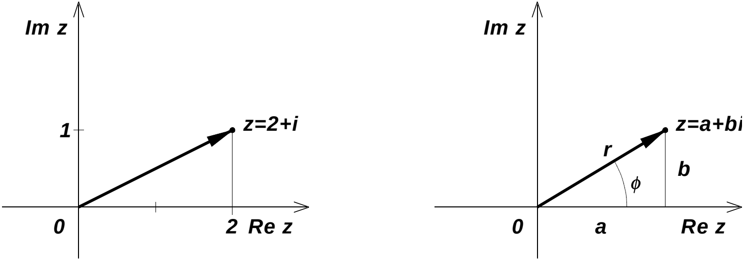
$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \\ &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} \end{aligned} \tag{1}$$

Damit folgt dann insbesondere

$$i^2 = -1.$$

Buch Kap. 1.7.2 – Komplexe Zahlen, die Gauß'sche Zahlenebene

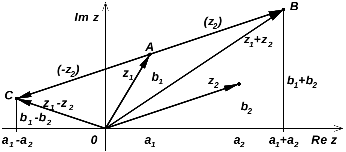
In einem (x, y)-Koordinatensystem tragen wir auf der x-Achse den Realteil und auf der y-Achse den Imaginärteil einer komplexen Zahl $z = a + bi$ ab. Dann entsprich jede komplexe Zahl einem Punkt in der Gauß'schen Zahlenebene.



Die Gauß'sche Zahlenebene ist ein Bild des Körpers $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen, die reelle Achse stellt dabei den Teilkörper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen dar.

Buch Kap. 1.7.2 – Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen $z = a + b\,i$ können in der Gauß'schen Zahlenebene durch Vektoren $\vec{0z}$ mit den Komponenten a, b dargestellt werden. Addition und Subtraktion entsprechen dann der Addition und Subtraktion von Vektoren.



Aus dem Dreieck $0AB$ liest man die Gültigkeit der Dreiecksungleichung für komplexe Zahlen ab. Es ist

$$|\overline{0B}| \leq |\overline{0A}| + |\overline{AB}|\ , \qquad \text{also} \qquad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|\ .$$

Ebenso gilt im Dreieck $0AC$

$$|\overline{0C}| \geq |\overline{AC}| - |\overline{0A}| \quad \text{und}$$
$$|\overline{0C}| \geq |\overline{0A}| - |\overline{AC}|\ , \quad \text{also} \quad |z_1 - z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|$$

Buch Kap. 2.1 – Begriff der Funktion

Defintion 2.1: (reelle Funktion einer reellen Veränderlichen)
Sei $D \subset \mathbb{R}$. Dann heißt eine Abbildung

$$f : D \to \mathbb{R},$$

welche jedem $x \in D$ genau ein $y = f(x) \in \mathbb{R}$ zuordnet, reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen.
$D = D(f) \subset \mathbb{R}$ heißt <u>Definitionsbereich</u> und

$$W = \{y \mid \exists x \in D \text{ mit } y = f(x)\}$$

<u>Wertebereich</u> von f.
Sind $A \subseteq \mathbb{R}$ und $B \subseteq \mathbb{R}$, so nennen wir

$$f(A) := \{y \in B | \text{ es gibt ein } x \in A \text{ mit } y = f(x)\}$$

die <u>Bildmenge</u> von A, und

$$f^{-1}(B) := \{x \in A | f(x) \in B\}$$

die <u>Urbildmenge</u> von B.

Buch Kap. 2.1 – Begriff der Funktion

Defintion 2.1 (Fortsetzung)

Eine Funktion $f : A \to B$ heißt

- **injektiv (eineindeutig), falls**

$$a \neq a' \Longrightarrow f(a) \neq f(a')$$

- **surjektiv (Abbildung auf, $f(A) = B$),**

$$\forall b \in B\, \exists\, a \in A : \quad b = f(a).$$

- **bijektiv, falls f injektiv und surjektiv ist.**

Die Funktionen f und g sind gleich ($f = g$), genau dann, wenn

- **$D(f) = D(g)$ und**
- **$f(x) = g(x)$ für alle $x \in D(f)$**

gilt.