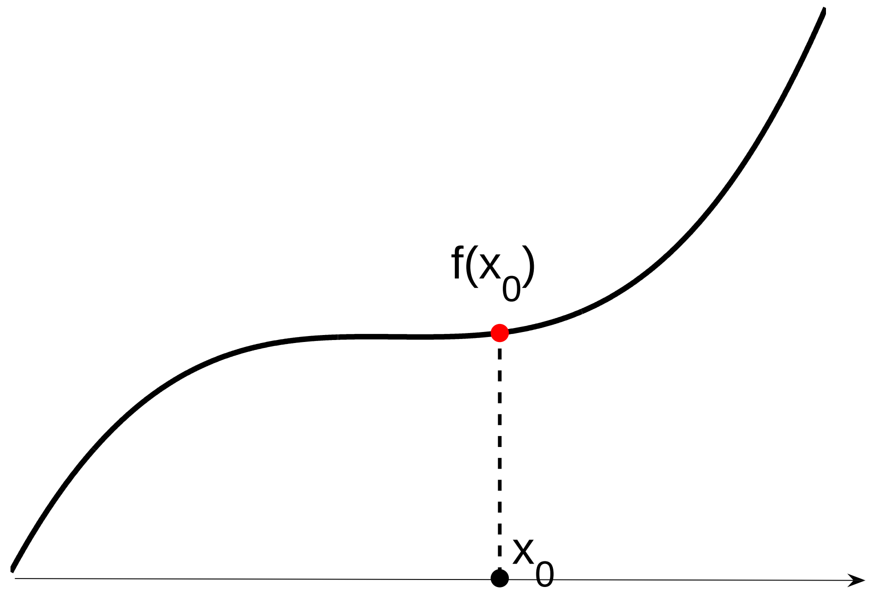
## Stetige Funktionen.

**Definition:** *Sei* $f : D \to W$, $D \subset V$, *eine Funktion.*

- $f(x)$ *heißt* `stetig ergänzbar` *in* $x_0 \in D'$, *falls* $\lim_{x \to x_0} f(x)$ *existiert.*
- $f(x)$ *heißt* `stetig` *im Punkt* $x_0 \in D \cap D'$, *falls* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- $f(x)$ *heißt* `stetig` *auf* $D$, *falls* $f(x)$ *in allen Punkten* $x_0 \in D \cap D'$ *stetig ist.*




**Graph einer stetigen Funktion.**

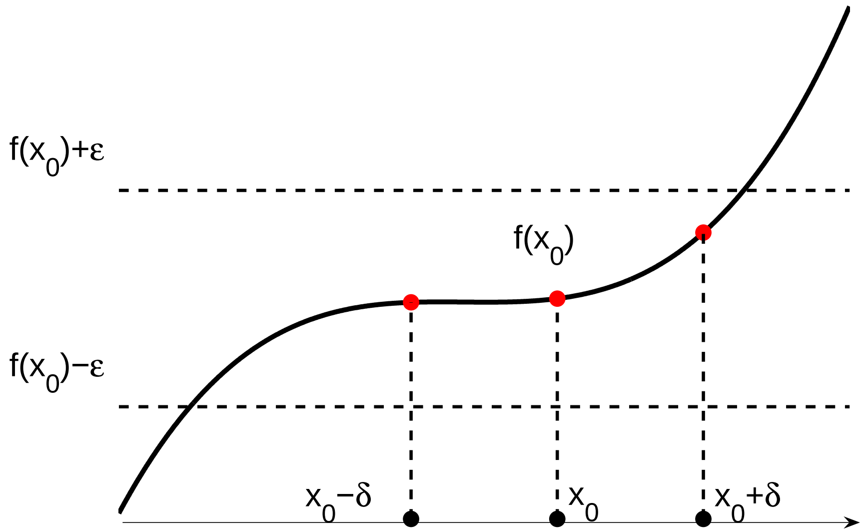
## $\varepsilon$-$\delta$-Definition der Stetigkeit.

**Satz** ($\varepsilon$-$\delta$-Definition der Stetigkeit**):**

*Für* $x_0 \in D \cap D'$ *sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

*(a)* $f(x)$ *ist stetig in* $x_0$, *d.h.* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$;

*(b)* $\forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, \delta > 0 : \forall\, x \in D : \quad \|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$




**Graph einer stetigen Funktion.**

**Beweis:** $(a) \Rightarrow (b)$: **Annahme:** $\exists\, \varepsilon > 0 \;:\; \forall\, \delta > 0 \;:\; \exists\, x_\delta \in D \;:$

$$\|x_\delta - x_0\| < \delta \quad \wedge \quad \|f(x_\delta) - f(x_0)\| \geq \varepsilon$$

Die Wahl $\delta = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ generiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in D$, mit

$$\|x_n - x_0\| < \frac{1}{n} \quad \wedge \quad \|f(x_n) - f(x_0)\| \geq \varepsilon$$

Wegen $\|f(x_n) - f(x_0)\| \geq \varepsilon$ gilt $x_n \neq x_0$ und somit

$$x_n \in D \setminus \{x_0\} \qquad \text{für alle } n.$$

Weiterhin gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Gleichzeitig konvergiert aber $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen $f(x_0)$. Dies steht im Widerspruch zur Annahme, wonach $f(x)$ im Punkt $x_0$ stetig ist. $\square$

$(b) \Rightarrow (a)$: Es gelte

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \qquad \text{mit } x_n \in D \setminus \{x_0\} \text{ für alle } n.$$

Wähle zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\forall\, x \in D : \|x - x_0\| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$$

Sei nun $N = N(\varepsilon)$ mit

$$\forall\, n \geq N \;:\; \|x_n - x_0\| < \delta.$$

Dann folgt direkt

$$\forall\, n \geq N \;:\; \|f(x_n) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0),$$

d.h. die Funktion $f(x)$ ist stetig im Punkt $x_0$. $\blacksquare$

## Beispiele für stetige Funktionen.

- Konstante Funktionen $f : D \longrightarrow W$, $f(x) \equiv a \in W$, sind stetig.
- Die Identität id : $V \longrightarrow V$, definiert durch id$(v) = v$ für alle $v \in V$, ist stetig.
- Univariate Polynome, $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (oder $p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$), der Form

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \qquad a_k \in \mathbb{R} \text{ (oder } a_k \in \mathbb{C}\text{)},$$

  sind stetig.

- Multivariate Polynome, d.h. Polynome in $n$ (reellen oder komplexen) Variablen, $p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (oder $p : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$), der Form

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{k_n=0}^{m_n} a_{k_1,\ldots,k_n} \cdot x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$$

  sind stetig.

## Weitere Beispiele für stetige Funktionen.

- Die Wurzelfunktion $\sqrt[m]{x} : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig auf $[0, \infty)$.
- Eine Potenzreihe, $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (oder $p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$), der Form

$$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \qquad a_k \in \mathbb{R} \text{ (oder } z \in \mathbb{C}\text{)},$$

  ist auf dem Bereich, wo die Reihe $p(z)$ *absolut* konvergiert, stetig.

- **Beispiel:** Die absolut konvergente Exponentialreihe $\exp(z)$ ist überall stetig. Weiterhin sind die Funktionen $\log(z)$, $\sin(z)$, und $\cos(z)$ auf ihren jeweiligen Definitionsbereichen stetig.
- Sind die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ stetig im Punkt $x_0$, so auch

$$f(x) + g(x), \quad \lambda \cdot f(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{(für } g(x_0) \neq 0\text{)}.$$

- **Allgemeiner:** Die Komposition stetiger Funktionen ist stetig.
  **Beispiel:** $f(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$ ist auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ stetig. □

**Satz:** *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen und beschränkten Intervall* $[a, b] \subset \mathbb{R}$. *Dann gelten die folgenden Eigenschaften.*

*(a) Existenz einer Nullstelle.*

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists\, x_0 \in (a, b) : f(x_0) = 0$$

*(b)* `Zwischenwertsatz`.

$$f(a) < c < f(b) \quad \Longrightarrow \quad \exists\, x_0 \in (a, b) : f(x_0) = c$$

*(c) Stetigkeit der Umkehrfunktion.*

*Ist* $f$ *streng monoton wachsend, d.h.* $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$, *so ist auch die Umkehrfunktion* $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to \mathbb{R}$ *stetig streng monoton wachsend.*

*(d)* `Min-Max-Eigenschaft`.

*Die Funktion* $f$ *nimmt ihr Maximum und Minimum auf* $[a, b]$ *an, d.h. es gibt* $x_1, x_2 \in [a, b]$ *mit*

$$f(x_1) = \min_{x \in [a,b]} f(x) \quad \textit{und} \quad f(x_2) = \max_{x \in [a,b]} f(x).$$

**Beweis:**

**(a):** klar mit Bisektionsverfahren.

**(b):** wende Teil (a) auf die Funktion $g(x) = f(x) - c$ an.

**(c):** Übung (siehe Literatur).

**(d):** Weise die Existenz des Maximums nach. Sei $s = \sup\{f(x) \mid a \leq x \leq b\}$.
Dann existiert eine Folge $(x_k)_k \subset [a, b]$ mit $f(x_k) \to s$ $(k \to \infty)$.

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß gibt es eine *konvergente* Teilfolge $(x_{k_j})_j$ von $(x_k)_k$ in $[a, b]$, d.h. für ein $x_0 \in [a, b]$ gilt

$$x_{k_j} \to x_0 \quad (j \to \infty) \qquad \text{und} \qquad f(x_{k_j}) \to s \quad (j \to \infty)$$

Wegen der Stetigkeit von $f$ gilt $s = f(x_0) = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$.

Den Nachweis für die Existenz des Minimums führt man analog. ■

## Wichtige Bemerkung.

Für die Gültigkeit der Min-Max-Eigenschaft ist es wesentlich, dass man ein `kompaktes` (d.h. abgeschlossenes und beschränktes) Intervall $[a, b]$ betrachtet.

Sonst gilt die Aussage im Allgemeinen nicht!!!

**Gegenbeispiel:**

Betrachte die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D = (0, \infty) \subset \mathbb{R}$ und

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad \text{für } x \in D = (0, \infty).$$

- $f$ ist auf ganz $D$ stetig, nimmt aber weder Minimum noch Maximum auf $D$ an.

## Min-Max-Eigenschaft für multivariate Funktionen.

**Definition:** *Eine Menge* $D \subset \mathbb{R}^n$ *heißt* `kompakt` *(*`folgenkompakt`*), falls jede Folge* $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $\mathbf{x}_k \in D$, *eine* **in der Menge** $D$ *konvergente Teilfolge*

$$\mathbf{x}_{k_j} \longrightarrow \mathbf{x}_0 \in D \ (j \longrightarrow \infty)$$

*besitzt.* □

**Satz:** *Ist* $D \subset \mathbb{R}^n$ *eine kompakte Menge und ist die Funktion* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig auf* $D$, *so nimmt* $f$ *auf* $D$ *Minimum und Maximum an, d.h. es gibt Punkte* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D$ *mit*

$$f(\mathbf{x}_1) = \min_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x}) \quad \text{und} \quad f(\mathbf{x}_2) = \max_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x}).$$

**Beweis:** Analog wie der Beweis von Teil (d) im vorigen Satz.

Verwende dazu insbesondere den Satz von Bolzano-Weierstraß. ■

## Kriterien für Kompaktheit.

**Satz:** *Für eine Menge* $D \subset \mathbb{R}$ *sind die folgenden Eigenschaften äquivalent.*

*(a)* $D$ *ist kompakt;*

*(b)* $D$ *ist abgeschlossen und beschränkt;*

*(c)* `Heine-Borel-Überdeckung`*:*

*Jede offene Überdeckung von* $D$ *besitzt eine* **endliche** *Teilüberdeckung, d.h. es gilt*

$$D \subset \bigcup_{i \in I} U_i, \quad U_i \text{ offen} \quad \Longrightarrow \quad \exists\, i_1, \ldots, i_k \in I : D \subset \bigcup_{j=1}^{k} U_{i_j}$$

□

**Beweis:** (nur die Äquivalenz $(a) \Longleftrightarrow (b)$).

$(a) \Rightarrow (b)$**:** Sei $D$ kompakt.

Angenommen, $D$ wäre unbeschränkt. Dann gibt es eine Folge $(x_m) \subset D$ mit $\lim_{m\to\infty} \|x_m\| = \infty$. Diese Folge kann allerdings keine konvergente Teilfolge besitzen. Dies steht im Widerspruch zur Kompaktheit von $D$.

Angenommen, $D$ wäre nicht abgeschlossen. Dann gibt es einen Häufungspunkt $x_0$ von $D$ mit $x_0 \notin D$, d.h. es gibt eine Folge $(x_m) \subset D$ mit $\lim_{m\to\infty} x_m = x_0 \notin D$. Diese Folge kann aber keine in $D$ konvergente Teilfolge besitzen. Dies steht im Widerspruch zur Kompaktheit von $D$.

$(b) \Rightarrow (a)$**:** Sei $D$ abgeschlossen und beschränkt.

Sei $(x_m) \subset D$ eine Folge in $D$. Da $D$ beschränkt ist, ist auch die Folge $(x_m)$ beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt $(x_m)$ eine konvergente Teilfolge $(x_{m_j})$ mit $x_{m_j} \to x_0$. Da $D$ abgeschlossen ist, liegt $x_0$ in $D$. Somit ist $(x_{m_j})$ eine in $D$ konvergente Teilfolge von $(x_m)$. ■

## Beispiel.

Sei $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|$, d.h.

$$\mathbb{S}^{n-1} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}.$$

Offensichtlich ist $\mathbb{S}^{n-1}$ kompakt (abgeschlossen und beschränkt).

Somit existieren für jede gegebene Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ zwei Vektoren $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{S}^{n-1}$ mit

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}_1\| = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{n-1}} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \quad \text{und} \quad \|\mathbf{A}\mathbf{x}_2\| = \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{n-1}} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|$$

Dies folgt aus der Min-Max-Eigenschaft, denn die Funktion

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \varphi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|$$

ist stetig auf $\mathbb{S}^{n-1}$. $\square$

## Gleichmäßige Stetigkeit.

**Definition:** *Eine Funktion* $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, *heißt* gleichmäßig stetig *auf* $D$, *falls gilt:*

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, \delta > 0 : \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| < \varepsilon \qquad \square$$

**Satz:** *Jede stetige Funktion auf einem Kompaktum ist gleichmäßig stetig. D.h.:*

*Sei* $f : D \to \mathbb{R}^m$ *eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge* $D \subset \mathbb{R}^n$.
*Dann ist* $f$ *gleichmäßig stetig auf* $D$. $\square$

**Bemerkung:** Falls $f : D \to \mathbb{R}^m$ gleichmäßig stetig auf $D$, so ist $f$ stetig auf $D$.

**Beispiele:**

- $f(x) = 1/x$ ist stetig auf $(0, \infty)$, aber nicht gleichmäßig stetig auf $(0, \infty)$.
- $f(x) = \exp(x)$ ist stetig auf $\mathbb{R}$, aber nicht gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$.
- $f(x) = \sin(x)$ ist stetig auf $\mathbb{R}$ und sogar gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$.

## Stetigkeit vs Gleichmäßige Stetigkeit.

**Beispiel:** Betrachte die Funktion $f(x) = 1/x$ auf dem Intervall $D = (0, 1]$.

• $f$ ist in jedem Punkt $p \in (0, 1]$ stetig.

**Denn:** Sei $p \in (0, 1]$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Setze $\delta = \min\left(\frac{p}{2}, \frac{p^2\varepsilon}{2}\right)$.

Dann gilt für alle $x \in D$ mit $|x - p| < \delta$ (und somit $x \geq p/2$),

$$|f(x) - f(p)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{p}\right| = \left|\frac{x-p}{xp}\right| \leq \frac{2|x-p|}{p^2} < \frac{2\delta}{p^2} \leq \varepsilon.$$

• $f$ ist nicht gleichmäßig stetig auf $D$.

**Denn:** man kann (zu gegebenem $\varepsilon$) $\delta$ nicht unabhängig von $p$ wählen.

Wäre $f$ gleichmäßig stetig auf $D = (0, 1]$, so gäbe es zu $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$ mit

$$|f(x) - f(y)| < 1 \qquad \text{für alle } x, y \in (0, 1] \text{ mit } |x - y| < \delta.$$

Es gibt aber ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$|1/n - 1/(2n)| = 1/(2n) < \delta \quad \text{und} \quad |f(1/n) - f(1/(2n))| = n \geq 1. \qquad \blacksquare$$