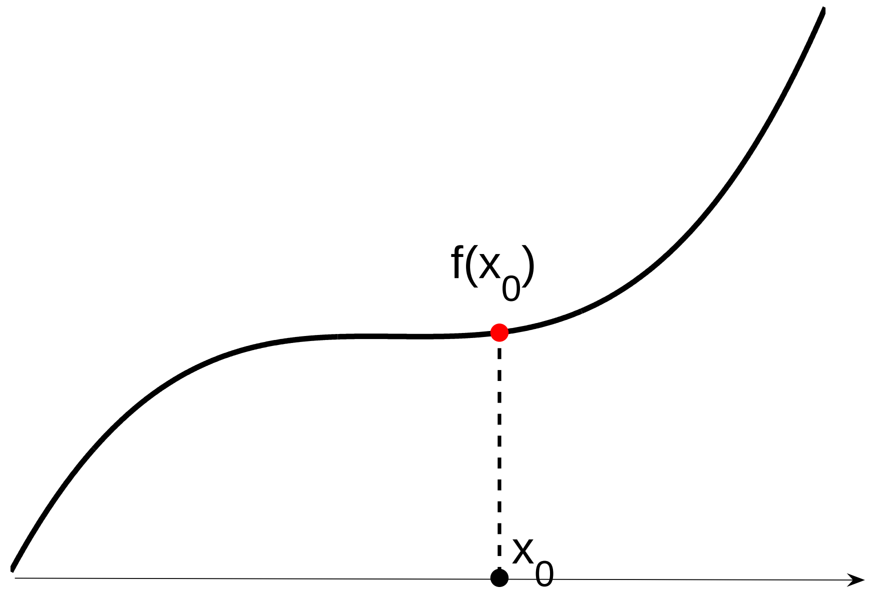
5 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

5.1 Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen



Graph einer stetigen Funktion.

Häufungspunkt und Abschluss.

Im Folgenden betrachten wir für normierte Vektorräume V und W Funktionen $f : D \to W$ mit Definitionsbereich $D \subset V$.

Definition:

- *Ein Punkt* $x_0 \in V$ *heißt* Häufungspunkt *von* D, *falls eine Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *existiert mit*
$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad : \quad x_n \in D, \;\; x_n \neq x_0, \;\; \lim_{n\to\infty} x_n = x_0;$$
- D' *bezeichnet die* Menge aller Häufungspunkte *von* D;
- $\overline{D} = D \cup D'$ *bezeichnet den* topologischen Abschluss *von* D;
- *Die Menge* D *heißt* abgeschlossen, *falls* $D' \subset D$, *also* $\overline{D} = D$ *gilt.* $\square$

Definition:

- *Zu* $x_0 \in V$ *und* $\varepsilon > 0$ *bezeichnet*

$$K_\varepsilon(x_0) := \{x \in V \mid \|x - x_0\| < \varepsilon\}$$

  die `(offene) Kugel` *um* x_0 *mit Radius* ε*. Die Menge*

$$\overline{K_\varepsilon(x_0)} = \{x \in V \mid \|x - x_0\| \leq \varepsilon\};$$

  heißt `abgeschlossene Kugel` *um* x_0 *mit Radius* ε*.*

- $D \subset V$ *heißt* `beschränkt`*, falls es* $\varepsilon > 0$ *und* $x_0 \in V$ *gibt mit* $D \subset K_\varepsilon(x_0)$*;*

- $x_0 \in D$ *heißt* `innerer Punkt` *von* D*, falls es* $\varepsilon > 0$ *gibt mit* $K_\varepsilon(x_0) \subset D$*;*

- D^0 *bezeichnet die* `Menge aller inneren Punkte` *von* D*,*
  kurz: `das Innere` *von* D*;*

- D *heißt* `offen`*, falls* $D^0 = D$*.* □

Beispiele.

- Das `offene Einheitsintervall` $D = (0, 1)$ ist offen und beschränkt. Es gilt $\{0, 1\} \notin D$, aber $\{0, 1\} \in D'$. Somit $\overline{D} = [0, 1]$.
- Das `Einheitsintervall` $D = [0, 1]$ ist abgeschlossen und beschränkt.
- Die Menge $D = [0, \infty) \subset \mathbb{R}$ ist abgeschlossen, aber nicht beschränkt.
- Für $D = (-\infty, 0) \cup \{1\} \cup (2, \infty)$ gilt

$$\begin{aligned} D' &= (-\infty, 0] \cup [2, \infty) \\ \overline{D} &= (-\infty, 0] \cup \{1\} \cup [2, \infty) \\ D^0 &= (-\infty, 0) \cup (2, \infty) \end{aligned}$$

- Für $x_0 \in V$ ist die Menge $D = K_\varepsilon(x_0) \subset V$ offen, und es gilt $D' = \overline{K}_\varepsilon(x_0)$.
- Innere Punkte $x_0 \in D^0$ sind stets Häufungspunkte von D, denn es gilt

$$x_0 + \frac{\varepsilon}{n+1} \frac{z}{\|z\|} \longrightarrow x_0 \quad (n \to \infty) \qquad \text{für } z \in V \setminus \{0\}.$$

Definition: *Gegeben sei eine Funktion $f : D \to W$, $D \subset V$, und ein $x_0 \in D'$.*

- $f(x)$ `konvergiert` *für $x \to x_0$ gegen den Grenzwert y_0, falls für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $x_n \in D$ und $x_n \neq x_0$, gilt*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$$

Man verwendet in diesem Fall die Notation

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0.$$

- *Im Fall $D = \mathbb{R}$ lassen sich* `einseitige` *Grenzwerte wie folgt definieren.*

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = y_0 \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in D,\ x_n < x_0 :$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = y_0 \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in D,\ x_n > x_0 :$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0. \qquad \square$$

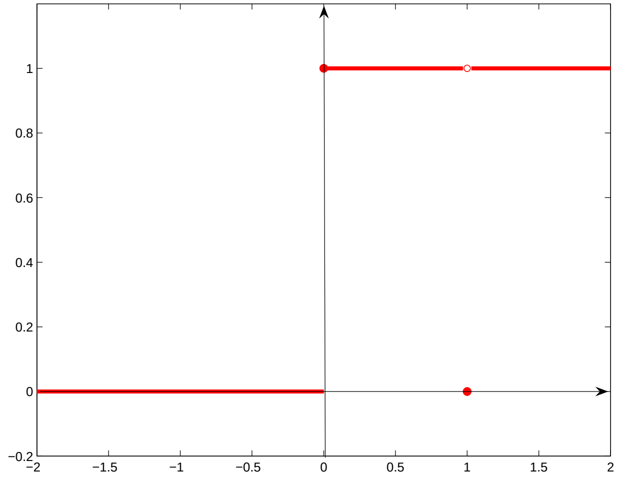
Beispiel. Betrachte die *Sprungfunktion* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \text{ oder } x = 1; \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $x \longrightarrow 0$ existiert der Grenzwert von f nicht!

Weiterhin gilt

$$\lim_{x \longrightarrow 1} f(x) = 1 \neq f(1).$$



Graph von $f(x)$.

Beispiel. Für die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = \sin(1/x)$, existiert weder der Grenzwert $\lim_{x \longrightarrow 0+} f(x)$ noch $\lim_{x \longrightarrow 0-} f(x)$.

Beispiel. Für die Funktion $f(x) = 1/x$ existieren die beiden einseitigen *uneigentlichen* Grenzwerte

$$\lim_{x \longrightarrow 0+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \longrightarrow 0-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Grenzwertsätze für Funktionen.

Bemerkung: Grenzwertsätze für Folgen übertragen sich auf Funktionen:

- Für den Grenzwert einer Summe von Funktionen gilt

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$

- Für den Grenzwert eines Produkts einer Funktion mit einem Skalar gilt

$$\lim_{x \to x_0} (\lambda \cdot f(x)) = \lambda \cdot \lim_{x \to x_0} f(x)$$

- Für Produkte von reellwertigen (komplexwertigen) Funktionen gilt

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \left(\lim_{x \to x_0} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \to x_0} g(x) \right)$$

- Für vektorwertige Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ (oder $\mathbb{C}^n$) gilt

$$\lim_{x \to x_0} (f_1(x), \ldots, f_n(x)) = \left(\lim_{x \to x_0} f_1(x), \ldots, \lim_{x \to x_0} f_n(x) \right) \qquad \square$$