Taylor-Entwicklungen und Taylor-Polynome.

Ausgangsfrage: Wie kann man $f(x)$ in der Nähe von x_0 approximieren?

0. Antwort: $f(x) \approx f(x_0)$ für $x \approx x_0$.

1. Antwort: Ist f differenzierbar, so gilt

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\textbf{Polynom vom Grad 1}} + o(x - x_0)$$

2. Antwort: Ist f zweimal differenzierbar, so gilt

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2}}_{\textbf{Polynom vom Grad 2}} + o\left((x - x_0)^2\right),$$

denn es gilt

$$f'(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Hinweis: Integration über $[x_0, x]$ liefert die zweite Antwort. $\square$

Satz (Satz von Taylor)**:** *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine* C^n*-Funktion und* $x_0 \in (a, b)$*.*
Dann gilt

$$f(x) = T_n(x; x_0) + o\left((x - x_0)^n\right)$$

mit dem (eindeutig bestimmten) Taylor-Polynom

$$T_n(x; x_0) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Den Punkt x_0 *nennt man den* Entwicklungspunkt*.*

Ist f *eine* C^{n+1}*-Funktion, so gilt die* Lagrange-Restgliedformel

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x; x_0) \\ R_n(x; x_0) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \end{aligned}$$

für ein $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$ *mit* $\theta \in (0, 1)$. $\square$

Zur Form des Taylorschen Polynoms.

Ziel: Approximiere f durch ein Polynom der Form

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k \qquad \text{mit } a_k \in \mathbb{R}.$$

Forderungen: $f^{(j)}(x_0) = T^{(j)}(x_0)$ für $j = 0, 1, \ldots, n$.

Beachte: Für die j-te Ableitung von $T(x)$ gilt

$$T^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{n} a_k k(k-1) \cdot \ldots \cdot (k-j+1)(x-x_0)^{k-j}$$

und weiterhin $T^{(j)}(x_0) = a_j \cdot j! = f^{(j)}(x_0)$ mit der obigen Forderung.

Somit gilt

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \equiv T_n(x; x_0).$$

$\square$

Restgliedformeln für das Taylorsche Polynom.

Ausgangspunkt. Mit dem Satz von Taylor gilt $f(x) = T_n(x; x_0) + R_n(x; x_0)$.

- Integraldarstellung:

$$R_n(x; x_0) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x - t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$$

- Cauchy-Restgliedformel:

$$R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x - x_0)^{n+1} (1 - \theta)^n$$

mit $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $\theta \in (0, 1)$

- Schlömilch-Restgliedformel:

$$R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{p \cdot n!} (x - x_0)^{n+1} (1 - \theta)^{n+1-p}$$

mit $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $\theta \in (0, 1)$, $p \in \{1, 2, \ldots, n + 1\}$. $\square$

Taylor-Entwicklung der Exponentialfunktion.

Betrachte die Exponentialfunktion $f(x) = \exp(x)$. Zunächst gilt:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \exp(x) = \exp(x).$$

Mit dem Satz von Taylor gilt um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ die Darstellung

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x; 0)$$

mit dem Lagrange-Restglied

$$R_n(x; 0) = \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \qquad \text{für } \xi = \theta x \text{ mit } 0 < \theta < 1$$

Daraus bekommt man für $0 \leq x \leq 1$ die Fehlerabschätzung

$$|R_n(x; 0)| = \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \leq \frac{e}{(n+1)!}$$

Beispiel: Für $n = 10$ bekommt man $|R_{10}(x; 0)| \leq 6.81 \cdot 10^{-8}$. $\square$

Taylor-Entwicklung der Sinusfunktion.

Betrachte die Sinusfunktion $f(x) = \sin(x)$. Zunächst gilt:

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$$

Mit dem Satz von Taylor gilt um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ die Darstellung

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+2}(x;0)$$

mit dem Lagrange-Restglied

$$R_{2n+2}(x;0) = (-1)^{n+1} \frac{\cos(\xi)}{(2n+3)!} x^{2n+3} \qquad \text{für } \xi = \theta x \text{ mit } 0 < \theta < 1$$

Beispiel: Für $x \in [-\pi/6, \pi/6]$, $x \neq 0$ und $n = 3$ bekommt man

$$|R_8(x;0)| \leq \frac{1}{9!} \cdot |x|^9 \leq \frac{1}{9!} \cdot \left(\frac{\pi}{6}\right)^9 \approx 8.1513 \cdot 10^{-9}.$$

$\square$

Bemerkungen zu Taylor-Reihen.

- Die **Taylor-Reihe**

$$T_\infty(x;x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

einer C^∞-Funktion f ist im Allgemeinen **nicht konvergent**.

- Falls die Taylor-Reihe $T_\infty(x;x_0)$ von f konvergiert, so konvergiert $T_\infty(x;x_0)$ **nicht notwendigerweise** gegen f.

- Falls jedoch

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

gilt, so nennt man die Funktion f **reell analytisch**, zum Beispiel:

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Folgerung aus dem Satz von Taylor.

Satz: *Gilt für eine* C^{n+1}*-Funktion* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$\forall\, x \in [a, b] \quad : \quad f^{(n+1)}(x) = 0,$$

so ist $f(x)$ *ein Polynom höchstens* n*-ten Grades.*

Beweis: Für das Lagrange-Restglied gilt

$$R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = 0$$

und somit

$$f(x) \equiv T_n(x; x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

■

Beispiel: Taylor-Entwicklung für Polynome.

Ist die Funktion f ein Polynom vom Grad n, d.h. f besitzt die Darstellung

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad \text{mit } a_n \neq 0,$$

so ist für einen *beliebigen* Entwicklungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ das Taylor-Polynom $T_n(x; x_0)$ n-ten Grades von f um x_0 gegeben durch

$$T_n(x; x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

und es gilt $f \equiv T_n$, d.h. f und T_n sind identisch auf ganz $\mathbb{R}$.

- Das Taylor-Polynom T_n stellt f in der Polynombasis $\left\{(x - x_0)^k\right\}_{k=0}^{n}$ dar.
- Für den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ gilt $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, $0 \leq k \leq n$, und somit

$$T_n(x; 0) \equiv f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Auswertung von Polynomen durch Horner-Schema.

Sei p ein Polynom von Grad n mit der Darstellung

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k \qquad \text{mit } a_n \neq 0,$$

für ein $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann lässt sich p wie folgt darstellen.

$$p(x) = a_0 + (x - x_0)(a_1 + (x - x_0)(\ldots + (x - x_0)(a_{n-1} + (x - x_0)a_n)\ldots))$$

Dann wertet man p *stabil* und *effizient* mit dem `Horner-Algorithmus` aus.

```
y := 0;
for k = n,n-1,...,0
  y := a(k) + (x-x0)*y;
end;
```

Beispiel: Für $p(x) = 30(x-1)^3 + 100(x-1)^2 + 108(x-1) + 43$ gilt

$$p(x) = 43 + (x-1)(108 + (x-1)(100 + (x-1)30)).$$

Konvergenz des Newton-Verfahrens.

Satz: *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine* C^2*-Funktion und* $x^* \in (a, b)$ *eine einfache Nullstelle dieser Funktion. Dann ist das Newton-Verfahren*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

mit Startwerten x_0 *in der Nähe von* x^* *quadratisch konvergent.*

Beweis: Betrachte Taylor-Entwicklung zweiter Ordnung um $x_n \in [a, b]$,

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}(x - x_n)^2$$

woraus für $x = x^*$ mit $f(x^*) = 0$ und $f'(x^*) \neq 0$ folgt

$$-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = (x^* - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}(x^* - x_n)^2.$$

und somit

$$(x_{n+1} - x^*) = \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}\,(x_n - x^*)^2. \qquad \blacksquare$$

Hinreichende Kriterien für lokale Extrema.

Satz: *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine* C^2*-Funktion mit* $f'(x_0) = 0$ *für ein* $x_0 \in (a, b)$.

(a) Falls $f''(x_0) > 0$, *dann hat* f *in* x_0 *ein strenges lokales Minimum.*

(b) Falls $f''(x_0) < 0$, *dann hat* f *in* x_0 *ein strenges lokales Maximum.*

Beweis von (a): Mit der Lagrange-Restgliedformel gilt die Darstellung

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2$$

für ein $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$ mit $\theta \in (0, 1)$.

Da f'' stetig ist, ist f'' in einer Umgebung von x_0 positiv, d.h. es gilt

$$f''(x) > 0 \qquad \text{für alle } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon),$$

für ein $\epsilon > 0$. In diesem Fall besitzt f in x_0 ein strenges lokales Minimum.

Teil (b) beweist man analog. $\blacksquare$

Hinreichende Kriterien für lokale Extrema.

Problem: Was passiert im Fall $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$?

Hier gibt es zwei Möglichkeiten:

- Der stationäre Punkt x_0 ist ein strenges lokales Extremum.
- Der stationäre Punkt x_0 ist ein `Wendepunkt`.

Satz: *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine* C^{2n}*-Funktion mit*

$$f^{(k)}(x_0) = 0 \qquad \text{für } 1 \leq k \leq 2n - 1$$

für ein $x_0 \in (a, b)$*.*

(a) Falls $f^{(2n)}(x_0) > 0$*, dann hat* f *in* x_0 *ein strenges lokales Minimum.*

(b) Falls $f^{(2n)}(x_0) < 0$*, dann hat* f *in* x_0 *ein strenges lokales Maximum.*

Beweis(idee): Mit der Lagrange-Restgliedformel gilt

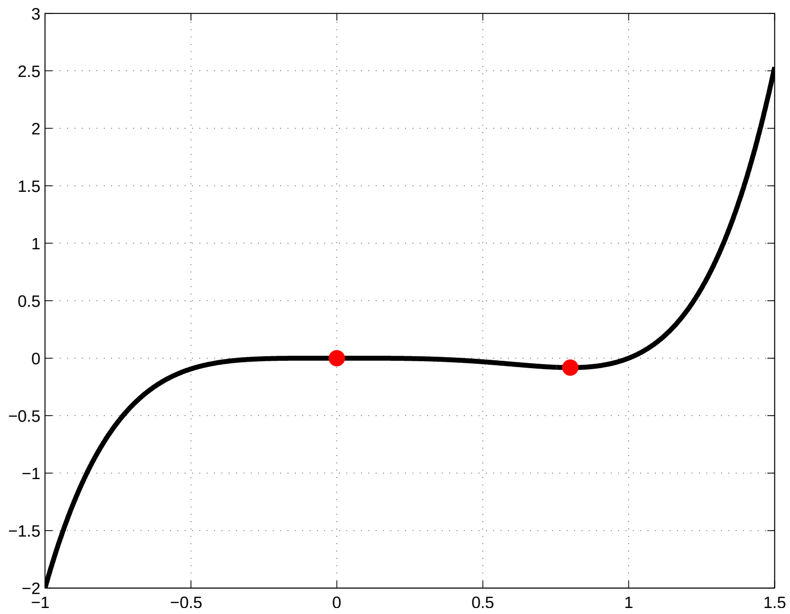
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}(x - x_0)^{2n}, \text{ für ein } \xi \in (x_0, x). \qquad \square$$

Beispiel. Betrachte die Funktion $f(x) = x^5 - x^4$.

Es gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5x^4 - 4x^3 \\ f''(x) &= 20x^3 - 12x^2 \\ f^{(3)}(x) &= 60x^2 - 24x \\ f^{(4)}(x) &= 120x - 24 \end{aligned}$$

Weiterhin
$f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = 0$
sowie $f^{(4)}(0) = -24$.



$f(x) = x^5 - x^4$.

Somit besitzt f in $x_0 = 0$ ein strenges lokales Maximum.

Weiterhin besitzt f in $x_1 = 4/5$ ein strenges lokales Minimum,
denn es gilt $f'(4/5) = 0$ und $f''(4/5) = 64/25 > 0$. $\square$

Konvexität und Konkavität.

Definition: *Eine Funktion* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *heißt*

- konvex, *falls für alle* $a \le x_1 < x < x_2 \le b$ *gilt*

$$f(x) \le f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(f(x_2) - f(x_1)).$$

- streng konvex, *falls für alle* $a \le x_1 < x < x_2 \le b$ *gilt*

$$f(x) < f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(f(x_2) - f(x_1)).$$

- konkav, *falls für alle* $a \le x_1 < x < x_2 \le b$ *gilt*

$$f(x) \ge f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(f(x_2) - f(x_1)).$$

- streng konkav, *falls für alle* $a \le x_1 < x < x_2 \le b$ *gilt*

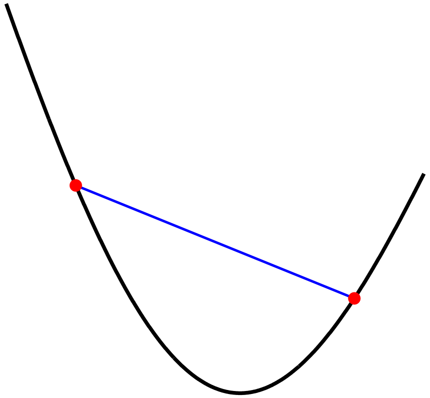
$$f(x) > f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(f(x_2) - f(x_1)).$$

$\square$

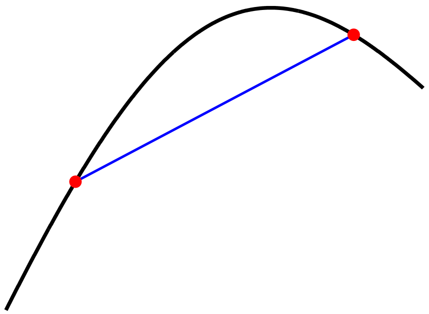
Kriterien für Konvexität und Konkavität.

Satz: *Sei f eine C^2-Funktion auf $[a, b]$. Dann gilt:*

- f *ist konvex, genau dann wenn* $f''(x) \geq 0$ *für alle* $x \in (a, b)$*;*
- f *ist konkav, genau dann wenn* $f''(x) \leq 0$ *für alle* $x \in (a, b)$*.*



f streng konvex (Linkskurve)



f streng konkav (Rechtskurve)

Bemerkung: Für eine C^1-Funktion f gilt:

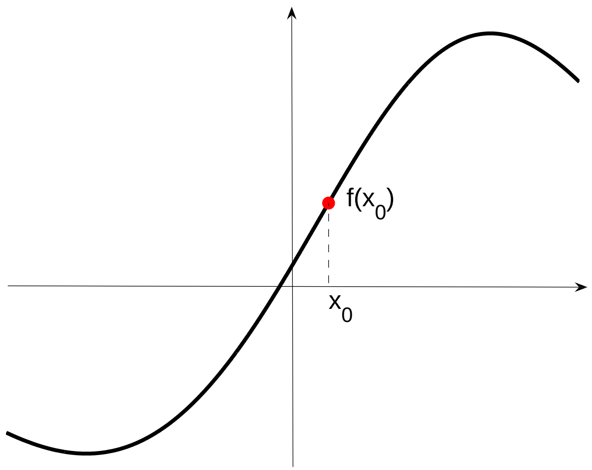
- Falls f streng konvex, so liegt der Graph von f oberhalb seiner Tangente.
- Falls f streng konkav, so liegt der Graph von f unterhalb seiner Tangente.

Wendepunkte.

Definition: *Eine Funktion* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *hat in* $x_0 \in (a, b)$ *einen* Wendepunkt*, falls eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist.*

- f *ist für ein* $\varepsilon > 0$ *konvex in* $(x_0 - \varepsilon, x_0) \subset [a, b]$ *und konkav in* $(x_0, x_0 + \varepsilon) \subset [a, b]$ *(*Links-Rechtskurve*).*
- f *ist für ein* $\varepsilon > 0$ *konkav in* $(x_0 - \varepsilon, x_0) \subset [a, b]$ *und konvex in* $(x_0, x_0 + \varepsilon) \subset [a, b]$ *(*Rechts-Linkskurve*).*

$\square$



Links-Rechtskurve in x_0.

Kriterien für Wendepunkte.

Satz: *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine C^3-Funktion.*

(a) **Notwendiges Kriterium:**

Ist $x_0 \in (a, b)$ ein Wendepunkt, so gilt: $f''(x_0) = 0$.

(b) **Hinreichende Kriterien:**

- *Gilt $f''(x_0) = 0$ und $f^{(3)}(x_0) > 0$ für ein $x_0 \in (a, b)$, so ist x_0 ein Wendepunkt von f mit Rechts-Linkskurve.*
- *Gilt $f''(x_0) = 0$ und $f^{(3)}(x_0) < 0$ für ein $x_0 \in (a, b)$, so ist x_0 ein Wendepunkt von f mit Links-Rechtskurve.*

Beweis: (a) folgt direkt aus der Stetigkeit von f'' und der Eigenschaft von x_0.

Zu Teil (b): Aus $f''(x_0) = 0$ und $f^{(3)}(x_0) > 0$ folgt

$$f''(x) < 0 \text{ für } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \quad \text{und} \quad f''(x) > 0 \text{ für } x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$$

für ein $\varepsilon > 0$. Somit ist f konkav in $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ und konvex in $(x_0, x_0 + \varepsilon)$, d.h. x_0 ist Wendepunkt mit Rechts-Linkskurve. Analog die andere Aussage. ■

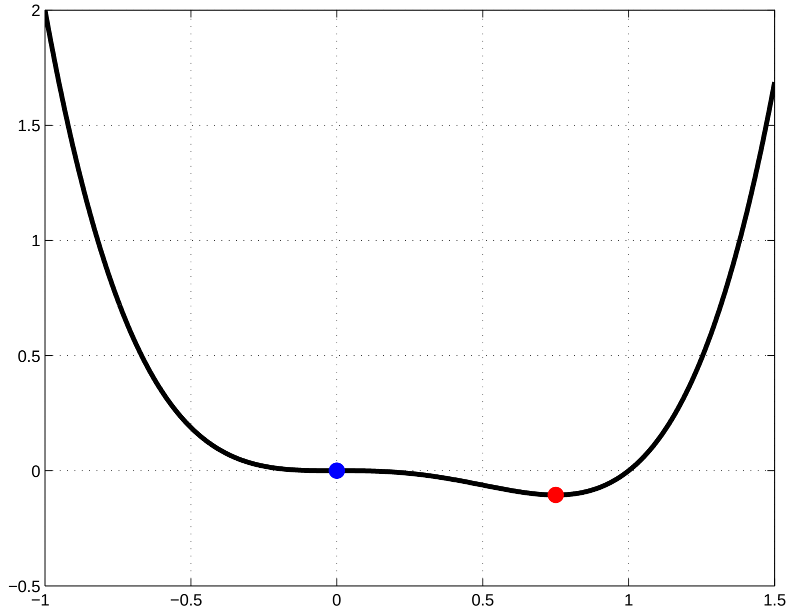
Beispiel. Betrachte die Funktion $f(x) = x^4 - x^3$.

Es gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 3x^2 \\ f''(x) &= 12x^2 - 6x \\ f'''(x) &= 24x - 6 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} f'(0) &= 0 \\ f''(0) &= 0 \\ f'''(0) &= -6 \end{aligned}$$



$f(x) = x^4 - x^3$.

Somit hat f in $x_0 = 0$ einen Wendepunkt (Links-Rechtskurve). Weiterhin hat f ein lokales Minimum in $x_1 = 3/4$, denn $f'(3/4) = 0$ und $f''(3/4) = 9/4 > 0$. □

Frage: Gibt es weitere Wendepunkte?