Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Prof. Dr. Timo Reis
Fachbereich Mathematik, Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg-Harburg

Wintersemester 2014/2015

Informationsquellen.

- **Internet**

  www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a1/1415/

- **Vorlesung**

  Dienstag, 11:30–13:00, SBS95, Audimax 1

  Donnerstag, 9:45–11:15, DE22, Audimax 2

- **Übungen in Tutorgruppen**

  Dr. Kai Rothe und Übungsgruppenleiter(innen)

- **Anleitung zu den Übungen**

  Dr. Kai Rothe.

  Dienstag, 13:15–14:45, SBS95, Audimax 1

  Mittwoch, 9:45–11:15, SBS95, Audimax 1

- **Sprechstunde Prof. Reis**

  Dienstag, SBS 95-E 3.079, 15:00–16:00.

Literaturquellen.

PRIMÄR:

- R. Ansorge, H. J. Oberle: Mathematik für Ingenieure 1,
  3. Auflage. WILEY-VCH, Berlin, 2000.
- H. J. Oberle, K. Rothe, Th. Sonar: Mathematik für Ingenieure,
  Band 3: Aufgaben und Lösungen. WILEY-VCH, Berlin, 2000.

SEKUNDÄR:

- K. Meyberg, P. Vachenauer: Höhere Mathematik, Bände 1 und 2.
  Springer, Berlin.
- K. Burg, H. Haf, F. Wille: Höhere Mathematik für Ingenieure,
  Band 1: Analysis. B.G. Teubner, Stuttgart, 1992.

Literaturquellen.

SEKUNDÄR (cont.):

- G. Bärwolff: Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure.
  Elsevier, Spektrum Akad. Verl., München 2006

- H. Neunzert, W. Eschmann, A. Blickensdörfer, K. Schelkes: Analysis 1 Ein Lehr- und Arbeitsbuch für Studienanfänger
  Springer, Berlin, 1993.

- N. Herrmann: Höhere Mathematik
  Oldenbourg, München, 2009.

Inhalte Analysis I.

- **Aussagen, Logik und Mengen.**
- **Zahlensysteme, Relationen und Funktionen.**
- **Folgen, Reihen und Konvergenz.**
- **Vektorräume und Normen.**
- **Stetige und gleichmäßig stetige Funktionen.**
- **Differenzierbarkeit und Differentiationsregeln.**
- **Mittelwertsätze, lokale Extrema, Satz von Taylor.**
- **Regel von de l'Hospital, Kurvendiskussion.**
- **Fehlerrechnung, Iterationsmethoden und Banachscher Fixpunktsatz.**

1 Aussagen, Mengen, Funktionen

1.1 Aussagen

Definition: *Eine Aussage ist eine sprachliche Konstruktion, von der man eindeutig entscheiden kann, ob sie WAHR oder FALSCH ist.*

Beispiele für Aussagen und keine Aussagen:

- Heute ist Mittwoch.
- Jede Primzahl ist ungerade.
- 2 ist eine Primzahl.
- Studieren macht Spaß . . . ganz besonders an der TUHH.
- Harburg liegt in Niedersachsen.
- Messi ist besser als Ronaldo.

Charakteristische Eigenschaft: Aussagen sind entweder WAHR oder FALSCH.

Wahrheitswerte von Aussagen. Sei A eine Aussage. Dann kann man A einen eindeutigen *Wahrheitswert* $w(A)$ zuordnen.

$$w(A) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ ist falsch;}$$
$$w(A) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ ist wahr.}$$

Verknüpfungen von Aussagen. Seien A und B Aussagen.

$\neg A$	:	Negation	“nicht A”
$A \wedge B$	:	Konjunktion	“A und B”
$A \vee B$	:	Disjunktion	“A oder B”
$A \Rightarrow B$	:	Implikation	“aus A folgt B”
$A \Leftrightarrow B$	:	Äquivalenz	“A ist äquivalent zu B”

Wahrheitswertetafeln.

$w(A)$	$w(B)$	$w(\neg A)$	$w(A \wedge B)$	$w(A \vee B)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(A \Leftrightarrow B)$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Bemerkung: Eine Implikation ist wahr, wenn die *Prämisse* falsch ist. Es gilt

$$A \Rightarrow B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \neg A \vee B$$

Definition:

● Eine Verknüpfung von Aussagen, die für sämtliche Kombinationen von Wahrheitswerten stets eine WAHRE Aussage ergeben, heißt `Tautologie`.

● Eine Verknüpfung von Aussagen, die für sämtliche Kombinationen von Wahrheitswerten stets eine FALSCHE Aussage ergeben, heißt `Kontradiktion`.

Beispiel für eine Tautologie.

$$(A \Rightarrow B) \quad \Longleftrightarrow \quad (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Betrachte zum Nachweis die folgende Wahrheitswertetafel.

$w(A)$	$w(B)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(\neg B)$	$w(\neg A)$	$w(\neg B \Rightarrow \neg A)$
1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

$w(A)$	$w(B)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(\neg B \Rightarrow \neg A)$	$(A \Rightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Beispiel für eine Tautologie.

$$\Big((A \Rightarrow B) \wedge \neg B\Big) \quad \Longrightarrow \quad \neg A$$

Betrachte zum Nachweis die folgende Wahrheitswertetafel.

$w(A)$	$w(B)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(\neg B)$	$w((A \Rightarrow B) \wedge \neg B)$
1	1	1	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

$w(A)$	$w(B)$	$w((A \Rightarrow B) \wedge \neg B)$	$w(\neg A)$	$w(((A \Rightarrow B) \wedge \neg B) \Rightarrow \neg A)$
1	1	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	0	1	1
0	0	1	1	1

Häufig verwendete Tautologien.

(**1**)	$A \vee \neg A$	*tertium non datur*
(**2**)	$\neg(A \wedge \neg A)$	*Widerspruch*
(**3**)	$\neg\neg A \iff A$	*doppelte Verneinung*
(**4**)	$\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B$	*de Morgan*
(**5**)	$\neg(A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B$	*de Morgan*
(**6**)	$(A \Rightarrow B) \iff (\neg B \Rightarrow \neg A)$	*Kontraposition*
(**7**)	$(A \Rightarrow B) \wedge A \implies B$	*modus ponens*
(**8**)	$(A \Rightarrow B) \wedge \neg B \implies \neg A$	*modus tollens*
(**9**)	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \implies (A \Rightarrow C)$	*modus barbara*
(**10**)	$A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	*Distributivgesetz*
(**11**)	$A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	*Distributivgesetz*

Aussageformen.

Definition: Eine Aussage, die von Variablen abhängt, heißt `Aussageform`.

Beispiele für Aussageformen.

- x ist eine gerade Zahl;
- x ist größer als y;
- x ist größer als y, und y ist größer als z.

Beachte: Wahrheitswerte von Aussageformen erhält man nur durch Einsetzen von Werten für die einzelnen Variablen.

Beispiel: Definiere Aussageform $A(x, y)$ durch

$$A(x,y) \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 < 2$$

Dann gilt:

- $A(1/2, 1)$ ist wahr, d.h. $w(A(1/2, 1)) = 1$;
- $A(-3, 2)$ ist falsch, d.h. $w(A(-3, 2)) = 0$.

Quantoren.

Mathematische Aussagen werden häufig durch Kombination von Aussageformen mit *Quantoren* formuliert.

Es gibt zwei Grundquantoren:

- $\forall$ `Allquantor`;
- $\exists$ `Existenzquantor`;

und weiterhin

- $\exists_1$ `Existenz mit Eindeutigkeit`.

Sei $A(x)$ eine Aussageform. Dann definieren wir neue Aussagen wie folgt.

- $\forall\, x : A(x)$, d.h. für alle x gilt $A(x)$;
- $\exists\, x : A(x)$, d.h. es gibt *mindestens* ein x, für das $A(x)$ gilt;
- $\exists_1\, x : A(x)$, d.h. es gibt *genau* ein x, für das $A(x)$ gilt.

Quantoren.

Die Wahrheitswerte der einzelnen Aussagen werden entsprechend definiert:

$w(\forall\, x : A(x)) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad$ für alle x ist $w(A(x)) = 1$

$w(\exists\, x : A(x)) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad$ es gibt *mindestens* ein $x,$ so dass $w(A(x)) = 1$

$w(\exists_1\, x : A(x)) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad$ es gibt *genau* ein $x,$ so dass $w(A(x)) = 1$

Negation von Quantoren.

Es gilt

$$\begin{aligned} \neg\Big(\forall\, x : A(x)\Big) \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists\, x : \Big(\neg A(x)\Big) \\ \neg\Big(\exists\, x : A(x)\Big) \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall\, x : \Big(\neg A(x)\Big) \end{aligned}$$

Mathematische Sätze und Beweistechniken.

Standardform eines Satzes:

$$A \quad \Longrightarrow \quad B, \qquad \text{für Aussagen } A, B,$$

wobei A Voraussetzung (Prämisse) und B Behauptung (Konklusion) heißt.

Mögliche Beweistechniken:

- **Direkter Beweis** (Kettenschluss)

$$A = A_0 \Longrightarrow A_1 \Longrightarrow A_2 \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow A_n = B$$

- **Indirekter Beweis** (Kontraposition, Widerspruch)

$$A \Longrightarrow B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \neg B \Longrightarrow \neg A$$

  ist eine Tautologie.

Exemplarisches Beispiel für einen ersten Beweis.

Satz: *Eine natürliche Zahl* $n \in \mathbb{N}$ *ist genau dann gerade, wenn ihr Quadrat* n^2 *gerade ist, d.h. für* $n \in \mathbb{N}$ *gilt die Äquivalenz*

$$n \text{ gerade} \quad \Longleftrightarrow \quad n^2 \text{ gerade.}$$

Beweis: Führe den Beweis in zwei Schritten:

1. Schritt: Zeige die Implikation

$$n \text{ gerade} \quad \Longrightarrow \quad n^2 \text{ gerade.}$$

2. Schritt: Zeige die Implikation

$$n^2 \text{ gerade} \quad \Longrightarrow \quad n \text{ gerade.}$$

1. Schritt: Direkter Beweis.

Sei n gerade. Dann $\exists k \in \mathbb{N} : n = 2k$

$$n = 2k \quad \Longrightarrow \quad n^2 = 4k^2 = 2(2k^2) \quad \Longrightarrow \quad n^2 \text{ gerade.}$$

2. Schritt: Indirekter Beweis. (zeige $\neg B \Rightarrow \neg A$ statt $A \Rightarrow B$)

Sei n^2 gerade. Angenommen n ist ungerade. Dann $\exists k \in \mathbb{N} : n = 2k - 1$.

$$\begin{aligned} n = 2k - 1 \quad &\Longrightarrow \quad n^2 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2(2k^2 - 2k) + 1 \\ &\Longrightarrow \quad n^2 \text{ ungerade.} \end{aligned}$$

Dies ist aber ein *Widerspruch* zur Annahme (n^2 gerade). ∎

Ein weiteres exemplarisches Beweisbeispiel.

Satz: *Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational, d.h. $\sqrt{2}$ läßt sich nicht als Bruch $\sqrt{2} = n/m$ mit natürlichen Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ darstellen.*

Beweis (durch Widerspruch) **:** Annahme: $\exists n, m \in \mathbb{N} : \sqrt{2} = \frac{n}{m}$.

Wir dürfen ohne Einschränkung annehmen, dass n und m teilerfremd sind. Denn ansonsten teilen wir m, n durch deren größten gemeinsamen Teiler (ggT).

Dann gilt:

$$2m^2 = n^2 \quad \Longrightarrow \quad n^2 \text{ gerade} \quad \Longrightarrow \quad n \text{ gerade} \quad \Longrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k.$$

Einsetzen in $2m^2 = n^2$ ergibt:

$$2m^2 = n^2 = (2k)^2 = 4k^2 \Longrightarrow m^2 = 2k^2 \Longrightarrow m^2 \text{ gerade} \Longrightarrow m \text{ gerade.}$$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass n und m teilerfremd sind.

Die Annahme $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ ist somit falsch $\Rightarrow \sqrt{2}$ ist irrational. ■

1.2 Mengen

Definition: *Eine Menge ist eine Kollektion von paarweise verschiedenen Objekten. Die einzelnen Objekte werden Elemente der Menge genannt.*

Beispiele für Mengen.

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ Menge der natürlichen Zahlen;
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ Menge der nicht-negativen ganzen Zahlen;
- Studierende der TUHH;
- Hörer der Analysis I im WS 2013/2014;
- Menge der Primzahlen.

Notationen: Sei M eine Menge.

$$a \in M \iff a \text{ ist ein Element der Menge } M$$

$$a \notin M \iff \neg(a \in M)$$

Definition von Mengen.

- Aufzählung der Elemente: $M := \{1, 2, 3, 4\}$
- Charakterisierende Eigenschaft der Menge, $M := \{x \in \Omega \mid A(x)\}$

Bedeutung der verwendeten Symbole.

:=	"wird definiert durch"
$A(x)$	Aussageform, definiert für Elemente x aus dem Grundbereich Ω

Teilmengen von Mengen.

$$M \subset N \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall x : (x \in M \Longrightarrow x \in N)$$

Gleichheit von Mengen.

$$M = N \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall x : (x \in M \Longleftrightarrow x \in N)$$

Die leere Menge. Menge, die kein Element enthält. Bezeichnung: $\emptyset$

Ordnungseigenschaften.

- $M \subset M$;
- $(M \subset N) \wedge (N \subset M) \quad \Longrightarrow \quad M = N$;
- $(M \subset N) \wedge (N \subset P) \quad \Longrightarrow \quad M \subset P$.

Verknüpfung von Mengen.

$$
\begin{array}{lcll}
M \cup N & := & \{x \,|\, x \in M \vee x \in N\} & \text{(Vereinigung)} \\
M \cap N & := & \{x \,|\, x \in M \wedge x \in N\} & \text{(Durchschnitt)} \\
M \setminus N & := & \{x \,|\, x \in M \wedge x \notin N\} & \text{(Differenz)} \\
M \times N & := & \{(a, b) \,|\, a \in M \wedge b \in N\} & \text{(Cartesisches Produkt)} \\
\mathcal{P}(M) & := & \{X \,|\, X \subset M\} & \text{(Potenzmenge)}
\end{array}
$$

Bemerkungen und weitere Bezeichnungen.

- Gilt $M \cap N = \emptyset$, so nennt man M und N `disjunkt`.
- Verknüpfung von endlich vielen Mengen.

$$
\begin{aligned}
\bigcup_{k=1}^{n} A_k &= A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \\
&:= \{a \,|\, \exists\, i \in \{1, \ldots, n\} : a \in A_i\} \\
\bigcap_{k=1}^{n} A_k &= A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \\
&:= \{a \,|\, \forall\, i \in \{1, \ldots, n\} : a \in A_i\} \\
\prod_{k=1}^{n} A_k &= A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \\
&:= \{(a_1, \ldots, a_n) \,|\, \forall\, i \in \{1, \ldots, n\} : a_i \in A_i\}
\end{aligned}
$$

Weitere Bemerkungen und Bezeichnungen.

- Für geordnete Paare bzw. n-Tupel gilt:

$$
\begin{aligned}
(a_1, a_2) = (b_1, b_2) \quad &\Longleftrightarrow \quad a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 \\
(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} : x_i = y_i
\end{aligned}
$$

- Wichtige Cartesische Produkte:
  - die `Euklidische Ebene`

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$$

  - der `dreidimensionale Euklidische Raum`

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \,|\, x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

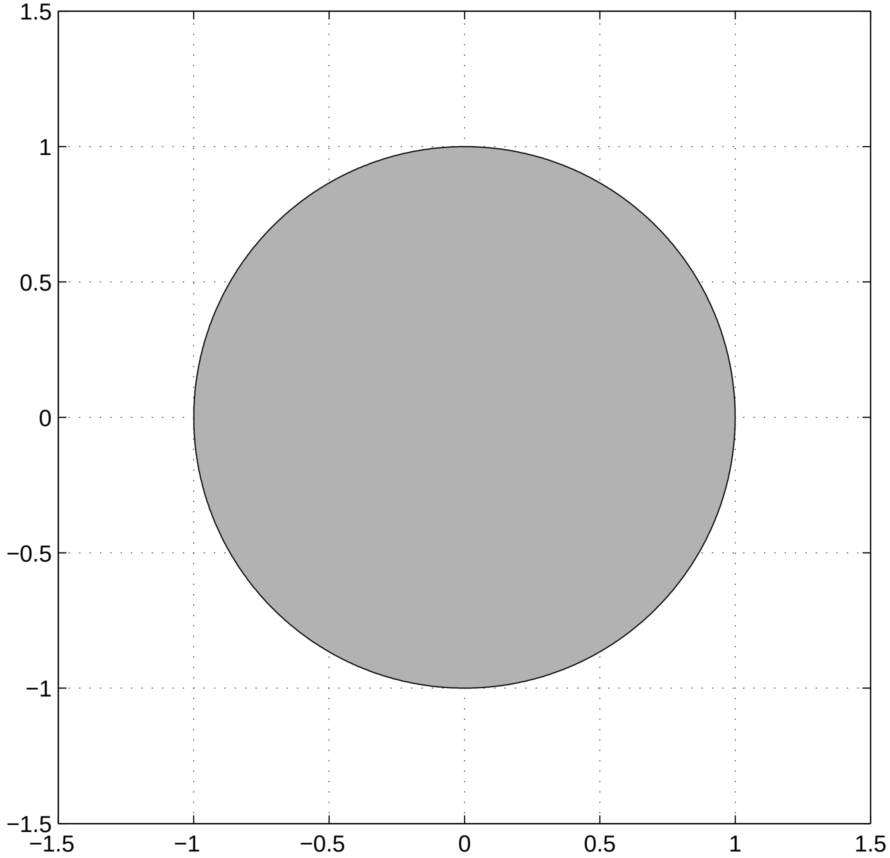
  - der n`-dimensionale Euklidische Raum`

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n\text{-fach}} = \{(x_1, \ldots, x_n) \,|\, x_i \in \mathbb{R}\}$$

Der Einheitskreis.

- Kreisscheibe mit Radius 1 (Einheitskreis)

$$A := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \right\}$$



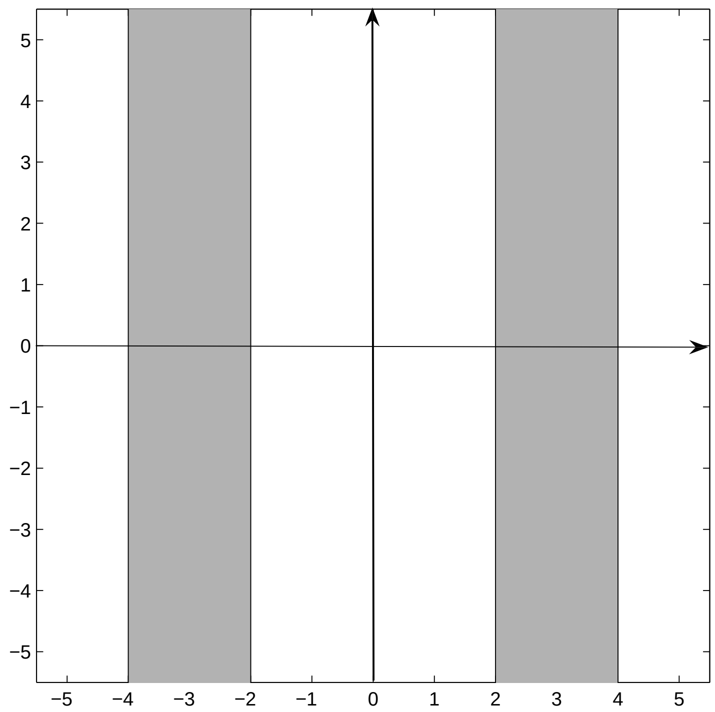
Zwei Streifen. $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 5 \leq x^2 + 1 \leq 17\}$

Beachte:

$$5 \leq x^2 + 1 \leq 17 \quad \Longleftrightarrow \quad 4 \leq x^2 \leq 16 \quad \Longleftrightarrow \quad -4 \leq x \leq -2 \vee 2 \leq x \leq 4$$

und somit gilt

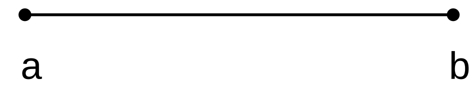
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -4 \leq x \leq -2 \vee 2 \leq x \leq 4\}.$$



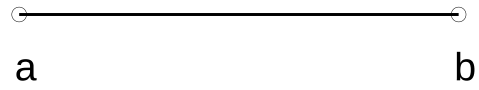
Intervalle in $\mathbb{R}$.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

$[a, b] \quad := \quad \{x \mid a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall



$(a, b) \quad := \quad \{x \mid a < x < b\}$ offenes Intervall



$[a, b) \quad := \quad \{x \mid a \leq x < b\}$ halboffenes Intervall

$(a, b] \quad := \quad \{x \mid a < x \leq b\}$ halboffenes Intervall