Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2014/15**
Prof. Dr. T. Reis
Dr. K. Rothe

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4

Aufgabe 13:

Man untersuche die angegebenen Folgen auf Konvergenz

a) $\boldsymbol{x}_n = \left(\dfrac{3n}{3^n}, \ \sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right), \ \dfrac{(-1)^n(n+1)}{n^2+1} \right)^T, \quad n \in \mathbb{N},$

b) $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x_n \cos y_n}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{3y_n \cos x_n}{4} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$

Hinweis: Eine geeignete Norm erleichtert das Leben.

Aufgabe 14:

a) Man stelle die reelle Zahl $x = 2.71\overline{82}$ unter Verwendung der Summenformel der geometrischen Reihe als Bruch dar.

b) Man zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 + 3 \cdot (-1)^n}{n+1}$$

alterniert und dass für $b_n := \dfrac{2 + 3 \cdot (-1)^n}{n+1}$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Warum ist das Leibniz-Kriterium nicht anwendbar?

Aufgabe 15:

Gegeben sei die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+3}}$.

a) Man zeige, dass die Reihe konvergiert.

b) Wie groß ist der Fehler maximal, wenn man anstelle des Grenzwertes S der Reihe die Partialsumme S_0 verwendet?

c) Ab welchem Index k unterscheiden sich die Partialsummen

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+3}}$$

vom Grenzwert S der Reihe um weniger als 0.01?

d) Wie lauten die ersten zwei Nachkommastellen des Grenzwertes S?

Aufgabe 16:

Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{4n+5}\right)^n$,

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k2^k}$,

c) $\displaystyle\frac{4}{6} + \frac{8}{11} + \frac{12}{16} + \frac{16}{21} + \frac{20}{26} + \cdots$,

d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$.

Abgabetermin: 15.12. - 19.12.14 (zu Beginn der Übung)