

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3

Aufgabe 9:

Man untersuche die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert:

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{4n^2 + 11n} - \sqrt{4n^2 - 3}, & b_n &= \sqrt[3]{\frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 2}{8n^3 + 4n^2 + 2}}, \\ c_n &= \frac{n^2 + 3}{n - 1} - \frac{n^3 + 2}{n^2 + 4n}, & d_n &= \left(\frac{4n + 5}{4n}\right)^{3n}, \\ e_n &= \frac{(-1)^n + 15 \cdot 7^{n-1}}{10 \cdot 4^{n+2} - 3 \cdot 7^{n+1}}, & f_n &= \frac{n + i^n}{3n} \quad (\in \mathbb{C}). \end{aligned}$$

Aufgabe 10:

Man untersuche die folgenden rekursiv definierten Folgen auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert:

$$\begin{aligned} \text{a) } & a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{5 - 3a_n}{4}, \\ \text{b) } & b_1 = 3, \quad b_{n+1} = \frac{b_n^2 + 8}{6}, \\ \text{c) } & c_1 = 2, \quad c_{n+1} = \frac{13}{6 - c_n}, \\ \text{d) } & d_1 = 2, \quad d_{n+1} = \sqrt{6 + d_n}. \end{aligned}$$

Aufgabe 11:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - x - 6$, sowie die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die sich aus dem Newton-Verfahren zur Nullstellenberechnung von f mittels Startwert $x_0 \geq 3$ ergibt.

- a) Man zeige, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen eine Nullstelle x^* konvergiert und berechne diese.
- b) Man zeige, dass die Folge (lokal) quadratisch konvergiert, d.h. es gibt eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit

$$|x_{n+1} - x^*| \leq c|x_n - x^*|^2.$$

Aufgabe 12:

Man zeige, dass die rekursiv definierte Folge

$$x_0 = a, \quad x_1 = b, \quad x_n = 9x_{n-1} - 20x_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2$$

folgende explizite Darstellung für $n \in \mathbb{N}$ besitzt:

$$x_n = (5a - b)4^n + (b - 4a)5^n.$$

Hinweis: Für den Beweis eignet sich die vollständige Induktion.

Abgabetermin: 1.12. - 5.12.14 (zu Beginn der Übung)