

## Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

### Blatt 2

#### Aufgabe 5:

- a) Man bestimme alle  $x \in \mathbb{R}$  für die gilt:  $x^2 \leq |3 - 2|x||$ .
- b) Man entscheide, welche der folgenden Funktionen injektiv, surjektiv und bijektiv sind und zeichne die zugehörigen Funktionsgraphen:
- (i)  $f_1 : [-4, 4] \rightarrow [0, 5]$ ,  $f_1(x) = |3 - 2|x||$ ,
  - (ii)  $f_2 : [1, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$ ,  $f_2(x) = \ln x$ ,
  - (iii)  $f_3 : [-\pi/4, \pi/4] \rightarrow [-1, 1]$ ,  $f_3(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ ,
  - (iv)  $f_4 : ] - 1, 1[ \rightarrow [-1, 1]$ ,  $f_4(x) = x^3$ .
- c) Eine Funktion heißt *gerade*, wenn  $f(x) = f(-x)$  gilt, bzw. *ungerade*, wenn  $f(-x) = -f(x)$  gilt. Welche der folgenden Funktionen sind gerade bzw. ungerade (man zeichne die Funktionsgraphen):
- (i)  $f_5(x) = \cos x + 2^x + 2^{-x}$ ,
  - (ii)  $f_6(x) = (x - 2)^3 + 4$ .

#### Aufgabe 6:

Man beweise für alle  $n \in \mathbb{N}$  durch vollständige Induktion

a) 
$$\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

b) 
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}},$$

c)  $a_n := (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$  ist durch 9 teilbar.

**Aufgabe 7:**

- a) Zur Berechnung von

$$\prod_{k=2}^n \frac{k^2}{k^2 - 1}$$

finde man eine Formel (notfalls durch Probieren) und beweise diese (ggf. durch vollständige Induktion).

- b) Für die Binomialkoeffizienten mit
- $n, m, k \in \mathbb{N}$
- und
- $k \leq m \leq n$
- weise man folgende Beziehungen nach:

$$\binom{n}{m} \cdot \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m-k}.$$

**Aufgabe 8:**

- a) Man bestimme für die Zahlen 119301 und 43010 den ggT und das kgV
- (i) unter Verwendung des Euklidischen Algorithmus,
  - (ii) mit Hilfe der Primfaktorzerlegung.
- b) Man überprüfe, ob folgende Mengen nach unten bzw. oben beschränkt sind und bestimme gegebenenfalls Infimum und Supremum
- (i)  $M_1 = [0, 20[ \cap [10, \infty[$ ,
  - (ii)  $M_2 = [1, 7[ \cup \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{n^2}{3n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$ .

**Abgabetermin:** 17.11. - 21.11.14 (zu Beginn der Übung)