Kapitel 4. Stetigkeit und Differenzierbarkeit

4.2. Differentialrechnung einer Variablen

Zunächst:

Einleitung auf Folie bzw. an der Tafel

Sekantensteigung und Differenzenquotient

liefern im Grenzwert

Tangentensteigung und Ableitung

(Differentialquotient)

4.2. Differentialrechnung einer Variablen

Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in D \cap D'$ gegeben.

1) Für ein $x \in D$, $x \neq x_0$ nennt man den Ausdruck

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Differenzenquotient bzw. Sekantensteigung von f bezüglich x.

2) Die Funktion $f(x)$ heißt differenzierbar in x_0, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. In diesem Fall nennt man den Grenzwert Ableitung oder Differentialquotient der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 und schreibt

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

4.2. Differentialrechnung einer Variablen

Definition: (Fortsetzung)
Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in D \cap D'$ gegeben.

3) Dann heißen die einseitigen Grenzwerte

$$f'(x_0^+) := \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0^-) := \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

rechtsseitige bzw. linksseitige Ableitung von f bei x_0.

Bemerkung:
Falls f in x_0 differenzierbar ist, so stimmen die rechtsseitige und linksseitige Ableitung von f bei x_0 überein.

Eine Interpretation der Ableitung einer Funktion.

Die Bewegung eines Massenpunktes sei beschrieben durch eine Funktion

$$c : I \to \mathbb{R}^3, \quad c = c(t), \quad I \subset \mathbb{R}$$

wobei t die Zeit und $c(t)$ den Ort des Massenpunktes bezeichnet.

Dann ist die Ableitung

$$\dot{c}(t_0) := \frac{dc}{dt}(t_0) := \lim_{t \to t_0} \frac{c(t) - c(t_0)}{t - t_0}$$

die Geschwindigkeit, mit der sich der Massenpunkt bewegt.

In $\Delta t = t - t_0$ legt der Massenpunkt die Strecke $\Delta c = c(t) - c(t_0)$ zurück; die *mittlere Geschwindigkeit* beträgt

$$\frac{\Delta c}{\Delta t} = \frac{c(t) - c(t_0)}{t - t_0}$$

Beispiel: Ableitung von Monomen.

Betrachte die Monomfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, für $n \in \mathbb{N}$.
Dann gilt

$$x^n - x_0^n = (x - x_0) \sum_{j=0}^{n-1} x^{n-1-j} x_0^j$$

und somit

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \sum_{j=0}^{n-1} x^{n-1-j} x_0^j = n x_0^{n-1}$$

Fazit: Die Funktion $f(x) = x^n$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = n x^{n-1}, \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

für die (erste) Ableitung von f.

Bemerkung: Für eine konstante Funktion $f(x) = c$ gilt $f'(x) = 0$.

Weitere Beispiele zur Ableitung von Funktionen.

Linearität der Ableitung.

Sind die beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ differenzierbar, so sind auch

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \qquad \text{und} \qquad (\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

differenzierbare Funktionen, und es gilt

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) \qquad \text{und} \qquad (\lambda f)'(x) = \lambda \cdot f'(x)$$

Ableitung von Polynomen.

Sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom, d.h. p hat die Form

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \, x^k \qquad \text{mit Koeffizienten } a_k \in \mathbb{R}, 0 \leq k \leq n$$

Dann ist die (erste) Ableitung von p gegeben durch

$$\frac{d}{dx} p(x) = \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \, x^k \right) = \sum_{k=1}^{n} a_k \, k \, x^{k-1}$$

Ableitungen einiger elementarer Funktionen.

Funktion	**Ableitung**	**Parameter**
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}, x > 0$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Ableitung von vektorwertigen Funktionen.

Sei $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}$, eine vektorwertige Funktion, d.h. f hat die Form

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))^T \in \mathbb{R}^m, \quad \text{für } x \in D.$$

Dann wird die Ableitung von f *komponentenweise* berechnet, d.h. es gilt

$$f'(x) = (f_1'(x), \ldots, f_m'(x))^T \in \mathbb{R}^m, \quad \text{für } x \in D.$$

Beispiele:

$$f(x) = (x, e^x, \sin x)^T \quad \Rightarrow \quad f'(x) = (1, e^x, \cos x)^T$$

$$f(x) = (\cos x, \sin x)^T \quad \Rightarrow \quad f'(x) = (-\sin x, \cos x)^T$$

Aus Differenzierbarkeit folgt Stetigkeit.

Satz: Ist $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, in $x_0 \in D^0$ differenzierbar, so ist f in x_0 stetig.
Beweis: Sei f in x_0 differenzierbar. Dann folgt

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0)) = 0$$

unmittelbar aus der Voraussetzung

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Wegen $\lim_{x \to x_0}(x - x_0)f'(x_0) = 0$ folgt schließlich

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

d.h. die Funktion f ist in x_0 stetig.

Wichtige Differentationsregeln.

Satz: Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, in $x_0 \in D^0$ differenzierbare Funktionen. Dann gelten die folgenden Differentiationsregeln.

a) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g$ in x_0 differenzierbar, und es gilt

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

b) Die Funktion $f \cdot g$ ist in x_0 differenzierbar, und es gilt die Produktregel

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

c) Ist $g(x_0) \neq 0$, so ist die Funktion $f(x)/g(x)$ in x_0 differenzierbar, und es gilt die Quotientenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

Weitere wichtige Differentationsregeln.

Satz:

a) Seien $f : D \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$ mit $D, E \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in D^0 \cap (f^{-1}(E))^0$. Falls f differenzierbar in x_0 und g differenzierbar in $f(x_0)$, so ist auch die Komposition $g \circ f$ in x_0 differenzierbar, und es gilt die Kettenregel:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

b) Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und in $x_0 \in [a, b]$ differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$, so ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to \mathbb{R}$ in $f(x_0)$ differenzierbar, und es gilt:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad (y_0 = f(x_0))$$

c) Ist $(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform, und sind $f, g : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}$, in $x_0 \in D^0$ differenzierbar, so ist auch die Funktion (f, g) in x_0 differenzierbar, und es gilt die verallgemeinerte Produktregel

$$\frac{d}{dx}(f(x), g(x))|_{x=x_0} = (f'(x_0), g(x_0)) + (f(x_0), g'(x_0))$$

Ableitungen höherer Ordnung.

1. Ist eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in jedem Punkt $x_0 \in [a, b]$ differenzierbar, so ist die Ableitung von f ebenso eine Funktion, $f' : [a, b] \to \mathbb{R}$.
2. Ist $f'(x)$ überall differenzierbar, so erhält man die zweite Ableitung $f''(x)$ von f, usw.
3. Ist $f(x)$ n–mal differenzierbar auf $[a, b]$ und ist zudem die n–te Ableitung $f^{(n)}(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$ stetig, so heißt die Funktion $f(x)$ n–mal stetig differenzierbar oder auch $\mathcal{C}^n$–Funktion bzw. $f \in \mathcal{C}^n([a, b])$.
4. Ist $f(x)$ n–mal differenzierbar auf $[a, b]$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, so heißt f beliebig oft differenzierbar (unendlich oft differenzierbar) oder auch $\mathcal{C}^\infty$–Funktion bzw. $f \in \mathcal{C}^\infty([a, b])$.
5. Ist $f(x)$ auf $[a, b]$ nur stetig, so heißt f C^0–Funktion bzw. $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$.

Kapitel 5. Weiterer Ausbau der Differentialrechnung

5.1. Extremwerte, Mittelwertsätze, Satz von Taylor

Definition: Sei V ein normierter Vektorraum und $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset V$, eine Funktion. Dann hat die Funktion f in $x_0 \in D$

1) ein globales Maximum, falls $f(x) \le f(x_0)$ für alle $x \in D$.
2) ein strenges globales Maximum, falls $f(x) < f(x_0)$ für alle $x \in D \setminus \{x_0\}$.
3) ein lokales Maximum, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit:

$$\forall x \in D : \quad \|x - x_0\| < \varepsilon \;\Rightarrow\; f(x) \le f(x_0)$$

4) ein strenges lokales Maximum, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit:

$$\forall x \in D : \quad 0 < \|x - x_0\| < \varepsilon \;\Rightarrow\; f(x) < f(x_0)$$

Analoge Definitionen gelten für minimale Funktionswerte (Extremwerte).

Notwendige Kriterien für lokale Extrema.

Satz: Besitzt $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Extremum und ist $f(x)$ in x_0 differenzierbar, so gilt $f'(x_0) = 0$.

Falls x_0 Randpunkt von $[a, b]$ (d.h. $x = a$ oder $x = b$), so gilt:

1. $f'(x_0) \le 0$ ($f'(x_0) \ge 0$) für ein lokales Maximum (Minimum) in $x_0 = a$,
2. $f'(x_0) \ge 0$ ($f'(x_0) \le 0$) für ein lokales Maximum (Minimum) in $x_0 = b$.

Beweis: Sei $x_0 \in [a, b]$ ein lokales Maximum von f. Dann gilt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \begin{cases} \le 0 & : \quad x_0 < x \ge \min(x_0 + \varepsilon, b) \\ \ge 0 & : \quad \max(x_0 - \varepsilon, a) \le x < x_0 \end{cases}$$

und daher $f'(x_0^-) \ge 0$ und $f'(x_0^+) \le 0$. Für $x_0 \in (a, b)$ folgt somit $f'(x_0) = 0$.

Definition: Ein Punkt x_0 mit $f'(x_0) = 0$ heißt stationärer Punkt von f.

Ein Beispiel zu Extremwerten.

Betrachte die Funktion $f(x) = x^2\sqrt{1-x^2}$ auf dem Intervall $[-1,1]$. Es gilt

$$f'(x) = \frac{2x - 3x^3}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1 < x < 1)$$

- Stationäre Punkte: $2x - 3x^3 = 0$ gilt nur für $x \in \{-\sqrt{2/3}, 0, \sqrt{2/3}\}$.

$$f'(x) = \begin{cases} > 0 & : \quad -1 < x < -\sqrt{2/3} \\ < 0 & : \quad -\sqrt{2/3} < x < 0 \\ > 0 & : \quad 0 < x < \sqrt{2/3} \\ < 0 & : \quad \sqrt{2/3} < x < 1 \end{cases}$$

- Globale Minima bei $x = \pm 1$ und $x = 0$ mit Funktionswert $f(x) = 0$.
- Globale Maxima bei $x = \pm\sqrt{2/3}$ mit Funktionswert $f(x) = 2/(3\sqrt{3})$.

Mittelwertsätze.

a) Satz von Rolle
Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b), so gilt:

$$f(a) = f(b) \quad \Rightarrow \quad \exists\, x_0 \in (a,b) \;:\; f'(x_0) = 0$$

b) Erster Mittelwertsatz
Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b), so gilt:

$$\exists\, x_0 \in (a,b) \;: \qquad f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

c) Zweiter Mittelwertsatz
Sind die Funktionen f, g stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b) und gilt $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$, so gilt:

$$\exists\, x_0 \in (a,b) \;: \qquad \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Beweise der Mittelwertsätze I.

a) Satz von Rolle
Da f auf dem Kompaktum $[a, b]$ stetig ist, nimmt f auf $[a, b]$ Minimum und Maximum an.

Fall 1: Liegen diese beiden Extrema am Rand des Intervalls $[a, b]$, so ist f konstant, woraus $f'(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$ folgt.

Fall 2: Anderenfalls liegt ein Extremum x_0 in (a, b), woraus $f'(x_0) = 0$ folgt.

b) Erster Mittelwertsatz
Die Funktion

$$h(x) = f(x) - \frac{x-a}{b-a}(f(b) - f(a))$$

erfüllt die Voraussetzungen vom Satz von Rolle, $h(a) = f(a) = h(b)$. Somit gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$0 = h'(x_0) = f'(x_0) - \frac{1}{b-a}(f(b) - f(a))$$

Beweise der Mittelwertsätze II.

c) Zweiter Mittelwertsatz
Wegen $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$, gilt $g(b) \neq g(a)$. Somit erfüllt die Funktion

$$h(x) = f(x) - g(x) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

die Voraussetzungen des Satzes von Rolle, denn es gilt

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a) - g(a)\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b) - g(a)} \\ &= f(b) - g(b)\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = h(b). \end{aligned}$$

Somit gibt es $x_0 \in (a, b)$ mit

$$0 = h'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Folgerungen aus den Mittelwertsätzen.

Monotone Funktionen:
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf $I \subset \mathbb{R}$ (Intervall). Dann gilt:

$$f'(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in I \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \text{ monoton wachsend}$$

$$f'(x) > 0 \text{ für alle } x \in I \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ streng monoton wachsend}$$

$$f'(x) \leq 0 \text{ für alle } x \in I \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \text{ monoton fallend}$$

$$f'(x) < 0 \text{ für alle } x \in I \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ streng monoton fallend}$$

Beispiel: Betrachte $f(x) = x - \ln(x+1)$ für $x \in (-1, \infty)$. Wegen

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$$

ist f streng monoton fallend auf $(-1, 0)$, streng monoton wachsend auf $(0, \infty)$.

Die Landau–Symbole.

Definition: Für eine Funktion $\varphi : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $0 \in D \cap D'$, und $k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ sagt man:

$$\varphi(h) = o(h^k) \quad :\Longleftrightarrow \quad \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(h)}{h^k} = 0$$

$$\varphi(h) = O(h^k) \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists\, C, \varepsilon > 0 : \; \forall\, 0 < |h| < \varepsilon : \left| \frac{\varphi(h)}{h^k} \right| \leq C$$

Bedeutung:
$\varphi(h) = o(h^k)$: $\varphi(h)$ konvergiert für $h \to 0$ schneller gegen Null als h^k.
$\varphi(h) = O(h^k)$: $\varphi(h)$ konvergiert für $h \to 0$ mindestens so schnell gegen Null wie h^k.

Beispiel: Ist f differenzierbar in x_0, so gilt:

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0)$$

Taylor–Entwicklungen und Taylor–Polynome.

Ausgangsfrage: Wie kann man $f(x)$ in der Nähe von x_0 approximieren?

Nullte Antwort: $f(x) \approx f(x_0)$ für $x \approx x_0$.

Erste Antwort: Ist f differenzierbar, so gilt

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\textbf{Polynom vom Grad 1}} + o(x - x_0)$$

Zweite Antwort: Ist f zweimal differenzierbar, so gilt

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2}}_{\textbf{Polynom vom Grad 2}} + o\left((x - x_0)^2\right)$$

Denn es gilt $f'(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$ und eine Integration über $[x_0, x]$ liefert die zweite Antwort.

Satz von Taylor.

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^n$–Funktion und $x_0 \in (a, b)$.

Dann gilt:

$$f(x) = T_n(x; x_0) + o\left((x - x_0)^n\right)$$

Dabei lautet das (eindeutig bestimmte) Taylor–Polynom

$$T_n(x; x_0) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Den Punkt x_0 nennt man den Entwicklungspunkt.

Ist f eine $\mathcal{C}^{n+1}$–Funktion, so gilt die Lagrange–Restgliedformel:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x; x_0) \\ R_n(x; x_0) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad \text{für ein } \xi \text{ mit } |\xi - x_0| < |x - x_0| \end{aligned}$$

Zur Form des Taylorschen Polynoms.

Ziel: Approximiere f durch ein Polynom der Form

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$$

Forderungen: $f^{(j)}(x_0) = T^{(j)}(x_0)$ für $j = 0, 1, \ldots, n$.
Beachte: Für die j–te Ableitung von $T(x)$ gilt

$$T^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{n} a_k k(k-1) \cdot \ldots \cdot (k-j+1)(x-x_0)^{k-j}$$

und weiterhin $T^{(j)}(x_0) = a_j \cdot j! = f^{(j)}(x_0)$ mit der obigen Forderung.
Somit gilt

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = T_n(x; x_0)$$

Restgliedformeln für das Taylorsche Polynom.

Ausgangspunkt. Mit Taylorschen Satz gilt $f(x) = T_n(x; x_0) + R_n(x; x_0)$.

1) Integraldarstellung

$$R_n(x; x_0) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

2) Cauchy–Restgliedformel

$$R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n$$

mit $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $\theta \in (0, 1)$

3) Schlömilch–Restgliedformel

$$R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{p\, n!}(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^{n+1-p}$$

mit $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $\theta \in (0, 1)$, $p \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$

Taylor–Entwicklung der Exponentialfunktion.

Betrachte die Exponentialfunktion $f(x) = \exp(x)$. Zunächst gilt:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\exp(x) = \exp(x)$$

Um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ ergibt sich daher die Darstellung

$$\begin{aligned} \exp(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x;0) \\ R_n(x;0) &= \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad \xi = \theta x, \quad 0 < \theta < 1 \end{aligned}$$

Daraus bekommt man für $0 \le x \le 1$ die Fehlerabschätzung

$$|R_n(x;x_0)| = \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \le \frac{e}{(n+1)!}$$

Beispiel: Für $n = 10$ erhält man $|R_{10}(x;x_0)| \le 6.81 \cdot 10^{-8}$.

Taylor–Entwicklung der Sinusfunktion.

Betrachte die Sinusfunktion $f(x) = \sin(x)$. Zunächst gilt:

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x) \text{ und } \frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$$

Um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ ergibt sich daher die Darstellung

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+2}(x;0)$$

mit dem Lagrange–Restglied

$$R_{2n+2}(x;0) = (-1)^{n+1}\frac{\cos\xi}{(2n+3)!}x^{2n+3}, \quad \xi = \theta x, \quad 0 < \theta < 1$$

Beispiel: Für $x \in [-\pi/6, \pi/6]$, $x \neq 0$ und $n = 3$ bekommt man

$$|R_8(x;0)| \le \frac{1}{9!} \cdot |x|^9 \le \frac{1}{9!} \cdot \left(\frac{\pi}{6}\right)^9 \approx 8.1513 \cdot 10^{-9}$$

Bemerkungen zu Taylor–Reihen.

- Die Taylor–Reihe

$$T_\infty(x;x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

einer $\mathcal{C}^\infty$–Funktion ist im Allgemeinen nicht konvergent.

- Falls die Taylor–Reihe $T_\infty(x;x_0)$ von f konvergiert, so konvergiert $T_\infty(x;x_0)$ nicht notwendigerweise gegen f.
- Falls jedoch

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

gilt, so nennt man die Funktion f reell analytisch oder $\mathcal{C}^\omega$–Funktion.

Beispiele: $\exp(x)$, $\cos(x)$ und $\sin(x)$.

Folgerung aus dem Satz von Taylor.

Satz: Gilt für eine $\mathcal{C}^{n+1}$–Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$\forall\, x \in [a,b] : \; f^{(n+1)}(x) = 0,$$

so ist $f(x)$ ein Polynom höchstens n–ten Grades.

Beweis: Für das Lagrange–Restglied gilt

$$R_n(x;x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = 0$$

und somit

$$f(x) = T_n(x;x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Beispiel: Taylor–Entwicklung für Polynome.

Ist die Funktion $f(x)$ selbst ein Polynom vom Grad n, also

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad (a_n \neq 0)$$

so ist das Taylor–Polynom n–ten Grades zu einem beliebigen Entwicklungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$T_n(x; x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

identisch zu $f(x)$, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Damit ist das Taylor–Polynom $T_n(x; x_0)$ nur eine Umordnung von f bezüglich des Punktes x_0.

Anwendung: Konvergenz des Newton–Verfahrens.

Satz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^2$–Funktion und $x^* \in (a, b)$ eine einfache Nullstelle dieser Funktion. Dann ist das Newton–Verfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

mit Startwerten x_0 in der Nähe von x^* quadratisch konvergent.

Beweis: Betrachte Taylor–Entwicklung zweiter Ordnung um $x_n \in [a, b]$,

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}(x - x_n)^2$$

woraus für $x = x^*$ mit $f(x^*) = 0$ und $f'(x^*) \neq 0$ folgt

$$-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = (x^* - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}\,(x_n - x^*)^2$$

und somit

$$(x_{n+1} - x^*) = \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}\,(x_n - x^*)^2$$

Hinreichende Kriterien für lokale Extrema.

Satz:
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^2$–Funktion mit $f'(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in (a, b)$.

a) Falls $f'' > 0$, dann hat f in x_0 ein strenges lokales Minimum.

b) Falls $f'' < 0$, dann hat f in x_0 ein strenges lokales Maximum.

Beweis: Mit der Lagrange–Restgliedformel gilt die Darstellung

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2$$

für ein ξ mit $|\xi - x_0| < |x - x_0|$.
Da f'' stetig ist, ist f'' in einer Umgebung von x_0 strikt positiv, d.h.

$$\exists \varepsilon > 0 : \; f''(x) > 0 \; \text{ für alle } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

In diesem Fall besitzt f in x_0 ein strenges lokales Minimum.

Hinreichende Kriterien für lokale Extrema.

Problem: Was passiert im Fall $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$?
Hier gibt es zwei Möglichkeiten

1) Der stationäre Punkt ist ein strenges lokales Extremum.

2) Der stationäre Punkt ist ein Wendepunkt.

Satz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^{2n}$–Funktion mit

$$f^{(k)}(x_0) = 0 \quad \text{für } 1 \leq k \leq 2n - 1$$

für ein $x_0 \in (a, b)$.

a) Falls $f^{(2n)} > 0$, dann hat f in x_0 ein strenges lokales Minimum.

b) Falls $f^{(2n)} < 0$, dann hat f in x_0 ein strenges lokales Maximum.

Beweisidee: Mit der Lagrange–Restgliedformel gilt

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}(x - x_0)^{2n} \quad \text{für ein } \xi \text{ mit } |\xi - x_0| < |x - x_0|$$

Beispiel zu lokalen Extremwerten.

Betrachte die Funktion $f(x) = x^5 - x^4$ und berechne die Ableitungen

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5x^4 - 4x^3 \\ f''(x) &= 20x^3 - 12x^2 \\ f^{(3)}(x) &= 60x^2 - 24x \\ f^{(4)}(x) &= 120x - 24 \end{aligned}$$

Es gilt: $\quad f'(x_0) = 0 \iff x_0 = 0 \vee x_0 = \frac{4}{5}$.

1) Der Punkt $x_0 = 0$ ist ein strenges lokales Maximum, denn

$$f''(0) = f^{(3)}(0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(4)}(0) = -24$$

2) Der Punkt $x_0 = 4/5$ ist ein strenges lokales Minimum, denn

$$f''(4/5) = \frac{16}{25}(20 \cdot \frac{4}{5} - 12) = 64/25 > 0$$

Konvexe und konkave Funktionen.

Definition:
Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt konvex (oder eine Linkskurve), falls für alle $x_1 < x < x_2$ in $[a, b]$ gilt

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(f(x_2) - f(x_1))$$

Die Funktion $f(x)$ heißt konkav (oder eine Rechtskurve), falls für alle $x_1 < x < x_2$ in $[a, b]$ gilt

$$f(x) \geq f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(f(x_2) - f(x_1))$$

Gelten die Ungleichungen jeweils strikt, d.h. mit $<$ bzw. $>$, so nennt man die Funktionen streng konvex beziehungsweise streng konkav.

Interpretation und Kriterien.

Interpretation: Eine Funktion heißt konvex, falls gilt

$$f(x) \leq g(x) = f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(f(x_2) - f(x_1))$$

Die Funktion $g(x)$ ist linear (also eine "Gerade") mit

$$g(x_1) = f(x_1) \quad \text{und} \quad g(x_2) = f(x_2)$$

und die Funktionswerte von $f(x)$ liegen unterhalb der Geraden.

Satz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^2$–Funktion. Dann gilt:

$$\begin{array}{lcl} f''(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in (a, b) & \Leftrightarrow & f \text{ ist konvex} \\ f''(x) > 0 \text{ für alle } x \in (a, b) & \Rightarrow & f \text{ ist streng konvex} \\ f''(x) \leq 0 \text{ für alle } x \in (a, b) & \Leftrightarrow & f \text{ ist konkav} \\ f''(x) < 0 \text{ für alle } x \in (a, b) & \Rightarrow & f \text{ ist streng konkav} \end{array}$$

Wendepunkte.

Definition: Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in (a, b)$ einen Wendepunkt, falls eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist.

- $f(x)$ ist für ein $\varepsilon > 0$ in $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ konvex und konkav in $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ (Links–Rechtskurve)
- $f(x)$ ist für ein $\varepsilon > 0$ in $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ konkav und konvex in $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ (Rechts–Linkskurve)

Satz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^3$–Funktion.

1) **Notwendiges Kriterium:** Ist $x_0 \in (a, b)$ ein Wendepunkt, so gilt: $f''(x_0) = 0$
2) **Hinreichende Kriterien:**
   Gilt $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) > 0$, so ist x_0 ein Wendepunkt von f mit Rechts–Linkskurve.
   Gilt $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) < 0$, so ist x_0 ein Wendepunkt von f mit Links–Rechtskurve.

5.2. Die Regeln von de l'Hospital

Ausgangsfrage: Wie berechnet man den Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

falls

1. beide Funktionen gegen Null konvergieren, d.h.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

2. beide Funktionen gegen Unendlich konvergieren, d.h.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$$

Beispiel: Sei $f(x) = x^2$ und $g(x) = x$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} x = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} x = \infty$$

Satz: (Regel von de l'Hospital für $\frac{0}{0}$)

Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, sei $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = g(x_0) = 0$ und es gelte $g(x) \neq 0$ für $x \neq x_0$. Dann gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

sofern der Grenzwert auf der rechten Seite existiert.

Beweis: Mit dem zweiten Mittelwertsatzes gilt

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

für einen Punkt ξ mit $|\xi - x_0| < |x - x_0|$.

Konvergiert nun x gegen x_0, so konvergiert auch ξ gegen x_0, d.h.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Weitere Regeln von de l'Hospital.

1. Für einseitige Grenzwerte gilt

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{und} \quad \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2. Falls die rechte Seite gegen $+\infty$ oder $-\infty$ divergiert, d.h. es gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$$

so gilt mit der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$$

3. Wir betrachten nun uneigentliche Grenzwerte der Form

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{und} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

De l'Hospital für uneigentliche Grenzwerte.

Satz: Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

sofern der jeweilige Grenzwert auf der rechten Seite existiert.

Beweis: Mit de l'Hospital und der Substitution $y = 1/x$ folgt

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{y \to 0^+} \frac{f(1/y)}{g(1/y)} = \lim_{y \to 0^+} \frac{f'(1/y)(-1/y^2)}{g'(1/y)(-1/y^2)} \\ &= \lim_{y \to 0^+} \frac{f'(1/y)}{g'(1/y)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \end{aligned}$$

Die zweite Regel von de l'Hospital.

Satz: (Regel von de l'Hospital für $\frac{\infty}{\infty}$)

Seien $f, g : (a, b) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, sei $x_0 \in (a, b)$, und es gelte

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$$

sowie $g'(x) \neq 0$ für $x \neq x_0$. Dann gilt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

sofern der Grenzwert auf der rechten Seite existiert.

Beispiel: Betrachte die `sinc-Funktion` $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ bei Null:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

Weitere Beispiele zur Regel von de l'Hospital.

Beispiel:

$$\lim_{x\to\infty} x \cdot \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-2}{x^2-1}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2-1} = 2$$

Beispiel:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x \cdot \ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{(1+x)\ln(1+x) + x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln(1+x) + 1 + 1} = \frac{1}{2}$$

5.3. Kurvendiskussion

Ziel: Feststellung des qualitativen und quantitativen Verhaltens einer gegebenen Funktion $y = f(x)$ mit Skizze des Graphen von f.

Dabei sollen (mindestens) folgende Punkte untersucht werden.

1. Definitionsbereich
2. Symmetrien
3. Pole (Singularitäten)
4. Asymptotisches Verhalten (Verhalten im Unendlichen)
5. Nullstellenbestimmung
6. Bestimmung der (lokalen) Extrema (inkl. Monotoniebereiche)
7. Wendepunkte (inkl. Konvexität und Konkavität)
8. Skizze des Graphen

Erklärungen zur Kurvendiskussion.

Im Folgenden bezeichne $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, eine Funktion.

- f ist symmetrisch zur y–Achse (bzw. f ist eine gerade Funktion), falls
$$f(-x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in D.$$
- f ist symmetrisch zum Ursprung (bzw. f ist eine ungerade Funktion), falls
$$f(-x) = -f(x) \quad \text{für alle } x \in D.$$
- f besitzt einen (algebraischen) Pol in $x_0 \in D$, falls
$$f(x) = \frac{g(x)}{(x - x_0)^k}$$
wobei $k \in \mathbb{N}$ (Ordnung des Pols) und g stetig in x_0 mit $g(x_0) \neq 0$.
k ungerade $\Rightarrow$ Pol mit Vorzeichenwechsel.
k gerade $\Rightarrow$ Pol ohne Vorzeichenwechsel.

Weitere Erklärungen zur Kurvendiskussion.

- Eine Gerade $y = \alpha x + \beta$ heißt Asymptote von f für $x \to \pm\infty$, falls gilt

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - \alpha x - \beta) = 0$$

- Die Koeffizienten einer Asymptoten ergeben sich durch

$$\alpha = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \beta = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - \alpha x)$$

- Monotoniebereiche. Hierbei soll untersucht werden, in welchen Intervallen f (streng) monoton wachsend bzw. (streng) monoton fallend ist.
- Konvexität und Konkavität. Hierbei soll untersucht werden, in welchen Intervallen f konvex bzw. konkav ist.

Beispiel zur Kurvendiskussion I.

Betrachte die Funktion

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 4}{x^2}$$

1. Definitionsbereich. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

In $x_0 = 0$ ist f nicht stetig ergänzbar, denn $\lim_{x \to 0} (2x^2 + 3x - 4) = -4 \neq 0$.

2. Symmetrien. keine, f ist weder gerade noch ungerade.

3. Pole: $x_0 = 0$ ist ein Pol ohne Vorzeichenwechsel, $\lim_{x \to 0\pm} f(x) = -\infty$.

4. Asmptotik. Es gilt

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 + 3x - 4}{x^2} = 2$$

und somit ist $y = 2$ eine horizontale Asymptote.

Beispiel zur Kurvendiskussion II.

5. Nullstellen. Es gilt

$$f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x^2 + 3x - 4 = 0$$

Somit sind $x_{1,2} = \frac{1}{4}(-3 \pm \sqrt{41})$ die beiden (einzigen) Nullstellen von f.

6. Lokale Extrema. Es gilt

$$f'(x) = \frac{-3x + 8}{x^3}$$

sowie

$$f'(x) = \begin{cases} < 0 & \text{für } -\infty < x < 0 \quad \text{(streng monoton fallend)} \\ > 0 & \text{für } 0 < x < \frac{8}{3} \quad \text{(streng monoton wachsend)} \\ < 0 & \text{für } \frac{8}{3} < x < \infty \quad \text{(streng monoton fallend)} \end{cases}$$

Bei $x = \frac{8}{3}$ liegt also ein stationärer Punkt vor und gleichzeitig (wegen der Monotonie) ein strenges lokales Maximum. Alternative zur Monotonie:

$$f''(x) = \frac{6x - 24}{x^4} \quad \Longrightarrow \quad f''\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{27}{64} < 0.$$

Beispiel zur Kurvendiskussion III.

7. Wendepunkte. Es gilt

$$f''(x) = \frac{6x - 24}{x^4} \quad \text{und} \quad f^{(3)}(x) = \frac{96 - 18x}{x^5}$$

Somit gilt $f''(x) = 0$ für $x = 4$ mit $f(4) = \frac{5}{2}$. Weiter ist $f^{(3)} = \frac{3}{128} > 0$.
Daher liegt bei $x = 4$ ein Wendepunkt mit Rechts–Linkskurve vor.
Zudem gilt

$$f''(x) = \begin{cases} < 0 & \text{für } -\infty < x < 0 \quad \text{(streng konkav)} \\ < 0 & \text{für } 0 < x < 4 \quad \text{(streng konkav)} \\ > 0 & \text{für } 4 < x < \infty \quad \text{(streng konvex)} \end{cases}$$

8. Skizze.

5.4. Fixpunkt–Iteration

Ziel: Iterative Lösung der (nichtlinearen) Gleichung $f(x) = 0$.

Möglichkeiten:

- Bisektionsverfahren (Intervallhalbierung)
- Newton–Verfahren,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Iteratives Verfahren: Fixpunkt–Iteration mit stetiger Verfahrensfunktion Φ und Startwert x_0, sodass

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \qquad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots$$

mit Grenzwert

$$x^* = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} \Phi(x_k) = \Phi\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) = \Phi(x^*)$$

Grundidee der Fixpunkt–Iteration.

Löse statt $f(x) = 0$ das Fixpunkt–Problem

$$x = \Phi(x)$$

mit der Fixpunkt–Iteration

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Aber: Verfahrensfunktion Φ ist nicht eindeutig!

Beispiel: Suche im Intervall $(0, \pi/2)$ die (eindeutige) Nullstelle von

$$f(x) := 2x - \tan x$$

1. Iteration

$$2x - \tan x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \tan x =: \Phi_1(x)$$

2. Iteration

$$2x - \tan x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \arctan 2x =: \Phi_2(x)$$

Ergebnisse der beiden Fixpunkt–Iterationen.

- Betrachte Iterationen

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\tan x_k \quad \text{und} \quad y_{k+1} = \arctan 2y_k$$

- Wähle als Anfangsnäherung in beiden Iterationen

$$x_0 = 1.2 \quad \text{und} \quad y_0 = 1.2$$

- Beide Iterationen konvergieren im Grenzwert $k \to \infty$, aber

$$\lim_{k\to\infty} x_k = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} y_k = 1.1655\,61185$$

- Berechne die Iterationen mittels eines Computerprogramms.

Bemerkung: Die Konvergenzgeschwindigkeit hängt ab vom Abstand

$$|x_{k+1} - x_k|$$

zweier benachbarter Folgenglieder.

Lipschitz–stetige und kontrahierende Abbildungen I.

Definition: Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Eine Abbildung $\Phi : D \to V$, $D \subset V$ heißt Lipschitz–stetig auf D, falls eine Konstante L existiert, sodass

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in D.$$

Die Konstante L nennt man Lipschitz–Konstante.

Definition: Eine Abbildung $\Phi : D \to V$, $D \subset V$ heißt kontrahierend, falls Φ Lipschitz–stetig mit Lipschitz–Konstanten $L < 1$ ist. Man nennt in diesem Fall L die Kontraktionskonstante von Φ.

Bemerkung:

- Jede Lipschitz–stetige Funktion ist stetig.
- Falls die Abschätzung

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| < \|x - y\| \quad \text{für alle } x \neq y$$

gilt, so ist Φ nicht notwendigerweise kontrahierend.

Lipschitz–stetige und kontrahierende Abbildungen II.

Beispiel: Die Betragsfunktion $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz–stetig auf ganz $\mathbb{R}$ mit $L = 1$.

Satz: Jede $\mathcal{C}^1$–Funktion $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz–stetig auf $[a, b]$ mit der Lipschitz–Konstanten

$$L := \sup\{|\Phi'(x)| \ : \ a \leq x \leq b\}$$

Beweis: Aus dem Mittelwertsatz folgt

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = |\Phi'(\xi)|\,|x - y| \leq L\,|x - y| \quad \text{für alle } x, y \in [a, b].$$

Beispiele:

- Die Sinusfunktion $\sin(x)$ ist Lipschitz–stetig auf $\mathbb{R}$ mit $L = 1$.
- Der Logarithmus $\ln(x)$ ist Lipschitz–stetig auf $[1, \infty)$ mit $L = 1$.
- Die Exponentialfunktion $\exp(x)$ ist Lipschitz–stetig auf $(-\infty, 0]$ mit $L = 1$.
- Die Exponentialfunktion $\exp(x)$ ist nicht Lipschitz–stetig auf $[0, \infty)$.

Der Banachsche Fixpunktsatz.

Satz: Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein vollständiger normierter Raum (Banachraum). Weiterhin sei $D \subset V$, $D \neq \emptyset$, abgeschlossen und $\Phi : D \to D$ eine kontrahierende Abbildung mit einer Kontraktionskonstanten $L < 1$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

1) Es gibt genau einen Fixpunkt x^* von Φ in D, d.h. $\Phi(x^*) = x^*$.
2) Für jeden Startwert $x_0 \in D$ konvergiert die Fixpunkt–Iteration

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots$$

gegen den Fixpunkt x^*.

3) Es gilt die a priori–Fehlerabschätzung

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{L^n}{1 - L}\|x_1 - x_0\|$$

4) und die a posteriori–Fehlerabschätzung

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{L}{1 - L}\|x_n - x_{n-1}\|$$

Zum Banachschen Fixpunktsatz.

Bemerkung: Die beiden Fehlerabschätzungen lassen sich folgendermaßen zusammenfassen

$$\|x_n - x^*\| \le \frac{L}{1-L}\|x_n - x_{n-1}\| \le \frac{L^n}{1-L}\|x_1 - x_0\|$$

Beweisideen:
Dass es nur einen einzigen Fixpunkt gibt, sieht man folgendermaßen: Angenommen, es gäbe einen weiteren Fixpunkt $x^{**} \in D$, mit $x^{**} \neq x^*$. Dann folgt der Widerspruch

$$\|x^{**} - x^*\| = \|\Phi(x^{**}) - \Phi(x^*)\| \le L\,\|x^{**} - x^*\| < \|x^{**} - x^*\|$$

Die Konvergenz der Iteration folgt aus der Kontraktionseigenschaft der Abbildung Φ: speziell zeigt man, dass die Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchy–Folge mit Grenzwert x^* ist. Aus der Stetigkeit von Φ folgt dann $x^* = \Phi(x^*)$.

Ein Beispiel zum Banachschen Fixpunktsatz.

Berechne den Fixpunkt von $\Phi(x) = 0.1 \cdot \exp(x)$ auf $D = [-1, 1]$.
Überprüfe zunächst die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes:

- D ist nichtleer und abgeschlossen,
- es gilt $0 < \Phi(x) \le 0.1 \cdot e < 1$ und somit $\Phi(D) \subset D$,
- es gilt $|\Phi'(x)| = \Phi(x) \le e/10 < 1$ für alle $x \in D$,
- somit ist Φ kontrahierend auf D mit $L = e/10 < 1$.

Damit sind die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.
Berechne nun den Fixpunkt $x^* \in D$ von Φ mit der Iteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$.
Setze $x_0 = 1$. Dann ist $x_1 = e/10\ldots$, und es gilt die Abschätzung

$$\|x_n - x^*\| \le \frac{L^n}{1-L}\|x_1 - x_0\| = \frac{L^n}{1-L}(1 - e/10) = L^n$$

Für $\varepsilon = 10^{-6}$ bekommt man damit

$$|x_n - x^*| < \varepsilon \quad \text{für } n \ge 11.$$