## $\varepsilon$–$\delta$–Definition der Stetigkeit.

**Beweis a) $\Rightarrow$ b):** Annahme: $\exists\,\varepsilon > 0 : \ \forall\,\delta > 0 : \ \exists\, x_\delta \in D :$

$$\|x_\delta - x_0\| < \delta \quad \wedge \quad \|f(x_\delta - f(x_0)\| \geq \varepsilon$$

Die Wahl $\delta = \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ generiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in D$ mit

$$\|x_n - x_0\| < \frac{1}{n} \quad \wedge \quad \|f(x_n) - f(x_0)\| \geq \varepsilon$$

Wegen $\|f(x_n) - f(x_0)\| \geq \varepsilon$ gilt

$$x_n \neq x_0 \quad \Longrightarrow \quad x_n \in D \setminus \{x_0\}$$

sowie

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

Gleichzeitig konvergiert aber $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen $f(x_0)$ $\Rightarrow$ Widerspruch.



## $\varepsilon$–$\delta$–Definition der Stetigkeit.

**Beweis b) $\Rightarrow$ a):** Es gelte

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \quad x_n \in D \setminus \{x_0\}$$

Wähle zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\forall\, x \in D \ : \ \|x - x_0\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

Sei nun $N = N(\varepsilon)$ mit

$$\forall\, n \geq N \ : \ \|x_n - x_0\| < \delta$$

Dann folgt direkt

$$\forall\, n \geq N \ : \ \|f(x_n) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

## Beispiele stetiger Funktionen.

- Konstante Funktionen $f : D \to W$, $f(x) = a \in W$ sind stetig.
- Die Identität $\mathrm{id} : V \to V$, definiert durch $\mathrm{id}(v) = v$ für alle $v \in V$, ist stetig.
- Univariate Polynome, $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$), der Form

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad a_k \in \mathbb{R} \text{ (oder } a_k \in \mathbb{C})$$

  sind stetig.
- Multivariate Polynome, d.h. Polynome in $n$ reellen (oder komplexen) Variablen, $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (oder $p : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$), der Form

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{k_n=0}^{m_n} a_{k_1,\ldots,k_n} \cdot x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$$

  sind stetig.



## Weitere Beispiele stetiger Funktionen.

- Die Wurzelfunktion $\sqrt[m]{x} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist stetig auf $[0, \infty)$.
- Eine Potenzreihe, $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$), der Form

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

  ist auf dem Bereich, auf dem die Reihe absolut konvergiert, stetig.
- Sind die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ stetig im Punkt $x_0$, so auch

$$f(x) + g(x), \quad \lambda \cdot f(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x_0) \neq 0).$$

- Die Komposition stetiger Funktionen ist wieder eine stetige Funktion.

  Beispiel: $f(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$ ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig.

## Eigenschaften stetiger Funktionen.

**Satz:** Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen und beschränkten Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Dann gilt

a) Existenz einer Nullstelle.

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists\, x_0 \in (a,b) : \; f(x_0) = 0$$

b) Zwischenwertsatz.

$$f(a) < c < f(b) \quad \Longrightarrow \quad \exists\, x_0 \in (a,b) : \; f(x_0) = c$$

c) Stetigkeit der Umkehrfunktion. Ist $f(x)$ streng monoton wachsend, d.h. mit $x < y$ folgt $f(x) < f(y)$, so ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend.

d) Min–Max–Eigenschaft. Die Funktion $f$ nimmt ihr Minimum und Maximum auf $[a,b]$ an, d.h. es gibt $x_1, x_2 \in [a,b]$ mit

$$f(x_1) = \min_{x \in [a,b]} f(x) \qquad f(x_2) = \max_{x \in [a,b]} f(x)$$



## Eigenschaften stetiger Funktionen.

**Wichtige Bemerkung:**

Für die Gültigkeit der Min–Max–Eigenschaft ist es wesentlich, dass man ein kompaktes (d.h. abgeschlossenes und beschränktes) Intervall $[a,b]$ betrachtet.

Sonst gilt die Aussage im Allgemeinen nicht!!!

**Gegenbeispiel:**

Betrachte die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D = (0,\infty) \subset \mathbb{R}$ und

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{für}\, x \in D = (0,\infty)$$

Es gilt

$$D' = [0,\infty), \qquad D \cap D' = (0,\infty)$$

Die Funktion ist auf ganz $D$ stetig, nimmt aber weder Minimum noch Maximum auf $D$ an.

## Min–Max–Eigenschaft für multivariate Funktionen.

**Definition:** Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt kompakt (folgenkompakt), falls jede Folge $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $\mathbf{x}_k \in D$, eine **in der Menge** $D$ konvergente Teilfolge

$$\mathbf{x}_{k_j} \to \mathbf{x}_0 \in D \quad (j \to \infty)$$

besitzt.

**Satz:** Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und ist die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ stetig auf $D$, so nimmt $f$ auf $D$ Minimum und Maximum an, d.h. es gibt Punkte $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D$ mit

$$f(\mathbf{x}_1) = \min_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x}) \qquad f(\mathbf{x}_2) = \max_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x})$$

**Merkregel:**

Eine stetige Funktion nimmt auf einem Kompaktum ihr Minimum und Maximum an.



## Kriterien für Kompaktheit.

**Satz:** Für eine Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:

a) $D$ ist kompakt.

b) $D$ ist abgeschlossen und beschränkt.

c) Heine–Borel–Überdeckung. Jede offene Überdeckung von $D$ besitzt eine **endliche** Teilüberdeckung, d.h. es gilt

$$D \subset \bigcup_{i\in I} U_i, \quad U_i \text{ offen} \quad \Rightarrow \quad \exists\, i_1, \ldots, i_k \in I \;:\; D \subset \bigcup_{j=1}^{k} U_{i_j}$$

**Beispiel:** Die Einheitssphäre $S^{n-1}$ in $\mathbb{R}^n$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|$,

$$S^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = 1\},$$

ist kompakt.

## Gleichmäßige Stetigkeit.

**Definition:** Eine Funktion $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt gleichmäßig stetig, falls gilt: $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \mathbf{x}, \mathbf{x_0} \in D$ :

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x_0}\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x_0})\| < \varepsilon$$

**Satz:**
Jede stetige Funktion auf einem Kompaktum $D$ ist gleichmäßig stetig.

**Bemerkung:**
Ist $f : D \to \mathbb{R}^m$ gleichmäßig stetig auf $D$, so ist $f$ stetig auf $D$.

**Beispiele:**

- $f(x) = 1/x$ ist stetig auf $(0, \infty)$, aber nicht gleichmäßig stetig auf $(0, \infty)$.
- $f(x) = \exp(x)$ ist stetig auf $\mathbb{R}$, aber nicht gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$.
- $f(x) = \sin(x)$ ist stetig auf $\mathbb{R}$ und sogar gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$.



## Kapitel 4. Stetigkeit und Differenzierbarkeit

### 4.2. Differentialrechnung einer Variablen

**Zunächst:**

Einleitung auf Folie bzw. an der Tafel

Sekantensteigung und Differenzenquotient

liefern im Grenzwert

Tangentensteigung und Ableitung

(Differentialquotient)

**Definition:** Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in D \cap D'$ gegeben.

1) Für ein $x \in D$, $x \neq x_0$ nennt man den Ausdruck

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Differenzenquotient bzw. Sekantensteigung von $f$ bezüglich $x$.

2) Die Funktion $f(x)$ heißt differenzierbar in $x_0$, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. In diesem Fall nennt man den Grenzwert Ableitung oder Differentialquotient der Funktion $f(x)$ an der Stelle $x_0$ und schreibt

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$





**Definition:** (Fortsetzung)
Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in D \cap D'$ gegeben.

3) Dann heißen die einseitigen Grenzwerte

$$f'(x_0^+) := \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0^-) := \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

rechtsseitige bzw. linksseitige Ableitung von $f$ bei $x_0$.

**Bemerkung:**
Falls $f$ in $x_0$ differenzierbar ist, so stimmen die rechtsseitige und linksseitige Ableitung von $f$ bei $x_0$ überein.

## Eine Interpretation der Ableitung einer Funktion.

Die Bewegung eines Massenpunktes sei beschrieben durch eine Funktion

$$c : I \to \mathbb{R}^3, \quad c = c(t), \quad I \subset \mathbb{R}$$

wobei $t$ die Zeit und $c(t)$ den Ort des Massenpunktes bezeichnet.

Dann ist die Ableitung

$$\dot{c}(t_0) := \frac{dc}{dt}(t_0) := \lim_{t \to t_0} \frac{c(t) - c(t_0)}{t - t_0}$$

die Geschwindigkeit, mit der sich der Massenpunkt bewegt.

In $\Delta t = t - t_0$ legt der Massenpunkt die Strecke $\Delta c = c(t) - c(t_0)$ zurück; die *mittlere Geschwindigkeit* beträgt

$$\frac{\Delta c}{\Delta t} = \frac{c(t) - c(t_0)}{t - t_0}$$



## Beispiel: Ableitung von Monomen.

Betrachte die Monomfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$x^n - x_0^n = (x - x_0) \sum_{j=0}^{n-1} x^{n-1-j} x_0^j$$

und somit

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \sum_{j=0}^{n-1} x^{n-1-j} x_0^j = n x_0^{n-1}$$

**Fazit:** Die Funktion $f(x) = x^n$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = nx^{n-1}, \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

für die (erste) Ableitung von $f$.

**Bemerkung:** Für eine konstante Funktion $f(x) = c$ gilt $f'(x) = 0$.

# Weitere Beispiele zur Ableitung von Funktionen.

**Linearität der Ableitung.**

Sind die beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ differenzierbar, so sind auch

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \qquad \text{und} \qquad (\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

differenzierbare Funktionen, und es gilt

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) \qquad \text{und} \qquad (\lambda f)'(x) = \lambda \cdot f'(x)$$

**Ableitung von Polynomen.**

Sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom, d.h. $p$ hat die Form

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k \qquad \text{mit Koeffizienten } a_k \in \mathbb{R}, 0 \leq k \leq n$$

Dann ist die (erste) Ableitung von $p$ gegeben durch

$$\frac{d}{dx} p(x) = \frac{d}{dx} \left( \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k \right) = \sum_{k=1}^{n} a_k\, k\, x^{k-1}$$



# Ableitungen einiger elementarer Funktionen.

| **Funktion** | **Ableitung** | **Parameter** |
|---|---|---|
| $x^\alpha$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ | $\alpha \in \mathbb{R}, x > 0$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $x \in \mathbb{R}$ |
| $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ | $x > 0$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ | $x \in \mathbb{R}$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ | $x \in \mathbb{R}$ |
| $\tan x$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ | $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ |

# Ableitung von vektorwertigen Funktionen.

Sei $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}$, eine vektorwertige Funktion, d.h. $f$ hat die Form

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))^T \in \mathbb{R}^m, \quad \text{für } x \in D.$$

Dann wird die Ableitung von $f$ *komponentenweise* berechnet, d.h. es gilt

$$f'(x) = (f_1'(x), \ldots, f_m'(x))^T \in \mathbb{R}^m, \quad \text{für } x \in D.$$

**Beispiele:**

$$f(x) = (x, e^x, \sin x)^T \quad \Rightarrow \quad f'(x) = (1, e^x, \cos x)^T$$

$$f(x) = (\cos x, \sin x)^T \quad \Rightarrow \quad f'(x) = (-\sin x, \cos x)^T$$



# Aus Differenzierbarkeit folgt Stetigkeit.

**Satz:** Ist $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, in $x_0 \in D^0$ differenzierbar, so ist $f$ in $x_0$ stetig.
**Beweis:** Sei $f$ in $x_0$ differenzierbar. Dann folgt

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0) - (x - x_0) f'(x_0)) = 0$$

unmittelbar aus der Voraussetzung

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Wegen $\lim_{x \to x_0} (x - x_0) f'(x_0) = 0$ folgt schließlich

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

d.h. die Funktion $f$ ist in $x_0$ stetig.

# Wichtige Differentationsregeln.

**Satz:** Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, in $x_0 \in D^0$ differenzierbare Funktionen. Dann gelten die folgenden Differentiationsregeln.

a) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g$ in $x_0$ differenzierbar, und es gilt

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

b) Die Funktion $f \cdot g$ ist in $x_0$ differenzierbar, und es gilt die Produktregel

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

c) Ist $g(x_0) \neq 0$, so ist die Funktion $f(x)/g(x)$ in $x_0$ differenzierbar, und es gilt die Quotientenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$