Beispiele zur Konvergenzuntersuchung bei Reihen.

Beispiel: Wir untersuchen die Konvergenz der Exponentialreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

Anwendung des Quotientenkriteriums ergibt

$$\left| \frac{\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{z^k}{k!}} \right| = \left| \frac{z^{k+1}\, k!}{z^k\, (k+1)!} \right| = \frac{|z|}{k+1} \quad \to \quad 0 \quad (k \to \infty)$$

Damit konvergiert die Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$ (absolut).

Wir setzen

$$\exp(z) \quad := \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Der Umordnungssatz für Reihen.

Sei $\sigma : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ eine beliebige Bijektion (Permutation) auf $\mathbb{N}_0$.

Ziel: Vergleiche die beiden Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k} \qquad (\sigma_k = \sigma(k))$$

Satz:

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe, und sei $\sigma : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ eine beliebige Permutation auf $\mathbb{N}_0$.
Dann ist die umgeordnete Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k}$ ebenfalls absolut konvergent, und die Grenzwerte der beiden Reihen stimmen überein, d.h. es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k}$$

Multiplikation von Reihen.

Frage: Wie funktioniert das Ausmultiplizieren von Reihen?

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = ???$$

Produkt von endlichen Summen. Für endliche Summen gilt

$$(a_0 + \ldots + a_m) \cdot (b_0 + \ldots + b_n) = \left(\sum_{k=0}^{m} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} a_k b_l$$

Frage: Gilt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l\right) \stackrel{?}{=} \sum_{k,l=0}^{\infty} a_k b_l$$

Beachte: Jedes Indexpaar $(k, l) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ tritt genau einmal auf.

Multiplikation von Reihen.

Satz: Die Reihen $\sum_{l=0}^{\infty} a_l$ und $\sum_{m=0}^{\infty} b_m$ seien absolut konvergent. Weiterhin sei $\sigma : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, $k \mapsto (\sigma_1(k), \sigma_2(k))$ für $k \in \mathbb{N}_0$, eine bijektive Abbildung. Dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)}$ absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)} = \left(\sum_{l=0}^{\infty} a_l\right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m\right)$$

Beweis: Für $m \in \mathbb{N}_0$ und für hinreichend großes $N \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{k=0}^{m} |a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)}| \leq \sum_{k=0}^{N} \sum_{l=0}^{N} |a_k|\,|b_l| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} |b_l|\right) < \infty$$

Somit ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)}$ absolut konvergent, und ihr Grenzwert ist nach dem Umordnungssatz unabhängig von der Permutation $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$.

Multiplikation von Reihen.

Zur Berechnung des Grenzwertes wählt man eine spezielle Reihenfolge

$\sigma(k)$	0	1	2	3	...
0	0	3	8	15	...
1	1	2	7	14	...
2	4	5	6	13	...
3	9	10	11	12	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Für $m = (n+1)^2 - 1$, mit $n \in \mathbb{N}_0$, bekommt man

$$\sum_{k=0}^{m} a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)} = (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)(b_0 + b_1 + \cdots + b_n)$$

und somit

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)} = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) \left(\sum_{l=0}^{n} b_l\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l\right)$$

Das Cauchy–Produkt von Reihen.

Weiterer Spezialfall: Nummerierung entlang der Diagonalen

$\sigma(k)$	0	1	2	3	...
0	0	2	5	9	...
1	1	4	8	13	...
2	3	7	12	18	...
3	6	11	17	24	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Man erhält damit das Cauchy–Produkt der (absolut konvergenten) Reihen:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)$$

$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \ldots$$

Anwendung des Cauchy–Produkts.

Für die Exponentialfunktion

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad (z \in \mathbb{Z})$$

gilt die Funktionalgleichung: $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$.

Begründung: Die obige Reihe $\exp(z), z \in \mathbb{C}$ ist absolut konvergent. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\exp(z)\exp(w) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{w^l}{l!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+w)^n = \exp(z+w)
\end{aligned}$$

4.1. Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen

Im Folgenden betrachten wir für normierte Vektorräume V und W Funktionen $f : D \to W$ mit Definitionsbereich $D \subset V$.

Definition:

- Ein Punkt $x_0 \in V$ heißt Häufungspunkt von D, falls eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existiert mit

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \; x_n \in D, \;\; x_n \neq x_0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \to \infty} x_n = x_0$$

- D' bezeichnet die Menge aller Häufungspunkte von D.
- $\overline{D} = D \cup D'$ bezeichnet den topologischen Abschluss von D.
- Die Menge D heißt abgeschlossen, falls $D' \subset D$, also $\overline{D} = D$ gilt.

Definition:

- Zu $x_0 \in V$ und $\varepsilon > 0$ bezeichnet

  $$K_\varepsilon(x_0) := \{x \in V \mid \|x - x_0\| < \varepsilon\}$$

  die (offene) Kugel um x_0 mit Radius ε. Die Menge

  $$\overline{K_\varepsilon(x_0)} := \{x \in V \mid \|x - x_0\| \leq \varepsilon\}$$

  heißt abgeschlossene Kugel um x_0 mit Radius ε.
- $D \subset V$ heißt beschränkt, falls es $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in V$ gibt mit $D \subset K_\varepsilon(x_0)$.
- $x_0 \in D$ heißt innerer Punkt von D, falls es $\varepsilon > 0$ gibt mit $K_\varepsilon(x_0) \subset D$.
- D^0 bezeichnet die Menge aller inneren Punkte von D.
- D heißt offen, falls $D^0 = D$ gilt.

Beispiele zur letzten Definition.

- Die Menge $D = [0, \infty) \subset \mathbb{R}$ ist abgeschlossen, aber nicht beschränkt.
- Für $D = (-\infty, 0) \cup \{1\} \cup (2, \infty) \subset \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} D' &= (-\infty, 0] \cup [2, \infty) \\ \overline{D} &= (-\infty, 0] \cup \{1\} \cup [2, \infty) \\ D^0 &= (-\infty, 0) \cup (2, \infty) \end{aligned}$$

- Für $x_0 \in V$ ist die Menge $D = K_\varepsilon(x_0) \subset V$ offen, und es gilt $D' = \overline{K_\varepsilon(x_0)}$.
- Innere Punkte $x_0 \in D^0$ sind immer Häufungspunkte von D, denn

$$x_0 + \frac{\varepsilon}{n+1} \frac{z}{\|z\|} \quad \to \quad x_0, \quad (n \to \infty) \quad \text{für } z \in V \setminus \{0\}.$$

Grenzwerte von Funktionen.

Definition:
Gegeben sei eine Funktion $f : D \to W$, $D \subset V$ und ein $x_0 \in D'$.

- $f(x)$ konvergiert für $x \to x_0$ gegen den Grenzwert y_0, falls für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $x_n \in D$ und $x_n \neq x_0$, gilt

  $$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$$

  Man verwendet in diesem Fall die Notation $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$.

- Im Fall $D = \mathbb{R}$ lassen sich einseitige Grenzwerte wie folgt definieren.

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = y_0 \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \;:\; x_n \in D,\; x_n < x_0 :$$
$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = y_0 \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \;:\; x_n \in D,\; x_n > x_0 :$$
$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$$

Beispiele zu Grenzwerten von Funktionen.

Beispiel 1: Betrachte die Sprungfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x < 0 \ \vee \ x = 1 \\ 1 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Für $x \to 0$ existiert der Grenzwert der Funktion nicht! Weiter gilt

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1 \neq f(1)$$

Beispiel 2: Für die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(1/x)$ existiert weder der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ noch $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$.

Beispiel 3: Für die Funktion $f(x) = 1/x$ existieren die beiden einseitigen uneigentlichen Grenzwerte

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Grenzwertsätze für Funktionen.

Bemerkung: Grenzwertsätze für Folgen übertragen sich auf Funktionen.

- Für den Grenzwert einer Summe von Funktionen gilt

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$

- Für den Grenzwert eines Produkts einer Funktion mit einem Skalar gilt

$$\lim_{x\to x_0}(\lambda f(x)) = \lambda \cdot \lim_{x\to x_0} f(x)$$

- Für Produkte von reellwertigen (komplexwertigen) Funktionen gilt

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right)$$

- Für vektorwertige Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ (oder $\mathbb{C}^n$) gilt

$$\lim_{x\to x_0}(f_1(x),\ldots,f_n(x)) = \left(\lim_{x\to x_0} f_1(x),\ldots,\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right)$$

Stetige Funktionen.

Definition:

Sei $f : D \to W, D \subset V$ eine Funktion.

1) Die Funktion $f(x)$ heißt stetig ergänzbar in $x_0 \in D'$, falls

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \quad \text{existiert und endlich ist.}$$

2) Die Funktion $f(x)$ heißt stetig in $x_0 \in D \cap D'$, falls

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

gilt.

3) Die Funktion $f(x)$ heißt stetig, falls $f(x)$ in allen Punkten $x_0 \in D \cap D'$ stetig ist.

Satz: (ε–δ–Definition)

Für $x_0 \in D \cap D'$ sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:

a) $f(x)$ ist stetig in x_0, d.h. es gilt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

b) $\forall \varepsilon > 0 : \; \exists \delta > 0 : \; \forall x \in D :$

$$\|x - x_0\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

Beweisidee:

Für die Richtung a) $\Rightarrow$ b) führen wir einen Widerspruchsbeweis.

Für die Richtung b) $\Rightarrow$ a) machen wir einen direkten Beweis.